Проблемы Трудовой Теории Стоимости Маркса.

Пушной Григорий Сергеевич[1].

Аннотация.

Доказывается, что в полностью автоматизированной капиталистической экономике, не использующей труд рабочих, добавленная стоимость и прибыль не обращаются в ноль, как это должно быть, согласно трудовой теории стоимости (ТТС). Доказывается, что фундаментальная теорема Маркса[2] (Nobuo Okishio's theorem) выполняется только при условиях: (1) в капиталистической экономике применяется наёмный труд и (2) стоимости в капиталистической экономике определяются так же, как и в более ранней докапиталистической экономике. Оба эти условия не являются очевидными, так как возможна капиталистическая экономика без использования наёмного труда, а отождествление докапиталистической и капиталистической стоимостей товаров составляет отдельную Аксиому ТТС, которая может быть пересмотрена для создания новой более согласованной с историческими данными о динамике цен версии ТТС.

The Problems of Marx's Labor Theory of Value.

Grigorii S. Pushnoi.

Abstract.

It is proved that in a fully automated capitalist economy where the expenditures of live labour equal to zero, added value and profit don't turn to zero, as it should be according to the Labor Theory of Value (LTV). It is proved that Marx's fundamental theorem (Nobuo Okishio's theorem) is satisfied only under the conditions: (1) wage labor is used in a capitalist economy and (2) values of goods in a capitalist economy are determined in the same way as in an earlier pre-capitalist economy. Both of these conditions are not obvious, since a capitalist economy without the use of hired labor can exist, and the identification of pre-capitalist and capitalist values of goods constitutes a separate Axiom of the standard version LTV, which can be revised to create a new version of the LTV, more consistent with historical data about price dynamics.

[1] Дата 2025 май – ноябрь. Адрес электронной почты: gpushnoi@yahoo.com

[2] Фундаментальная теорема Маркса (теорема Окишио) утверждает, что прибыли в капиталистической экономике положительны тогда и только тогда, когда норма эксплуатации (норма прибавочной стоимости) больше нуля. Теорема выполняется в экономике, применяющей наёмный труд, при условии, что стоимости товаров в капиталистической экономике определяются так же, как и в докапиталистической экономике.

1. Введение[3].

Трудовая Теория Стоимости (ТТС) Маркса базируется на нескольких аксиомах, постулирующих фундаментальную роль фактора «труд» в определении стоимостей товаров.

Аксиома-1. Вся добавленная в процессе производства товара стоимость создаётся живым трудом работников.

Аксиома-2. Добавленная стоимость состоит из компенсации работников (зарплаты) и прибыли.

Аксиома-3. Стоимость товаров (овеществлённый абстрактный труд), произведённых в условиях капитализма, определяется (и вычисляется) так же как и стоимость этих товаров в докапиталистической экономике.

Из этих аксиом следуют следующие утверждения:

Утверждение-1. Добавленная стоимость товара равна количеству живого труда работников по производству этого товара.

Утверждение-2. Добавленная стоимость, выраженная в деньгах, удовлетворяет тем же общим (перечисленным здесь) закономерностям, как и добавленная стоимость, выраженная как количество живого труда, если стоимость денег фиксирована.

Утверждение-3. Если затраты живого труда на производство товара равны нулю, то добавленная стоимость (выраженная в деньгах) тоже равна нулю.

Утверждение-4. Если затраты живого труда на производство товара равны нулю, то прибыль (выраженная в деньгах) равна нулю.

Утверждение-5. Добавленная стоимость не зависит от ставки оплаты труда, так как изменение ставки оплаты труда определяет лишь пропорцию деления добавленной стоимости между работниками и капиталистами.

Утверждение-6. Добавленная стоимость, стоимость товара и цена товара при фиксированной стоимости денег не зависит от ставки оплаты труда рабочих, так как оплата труда определяет долю рабочих в добавленной стоимости.

Утверждение-7 (теорема Окишио или фундаментальная теорема Маркса). Прибыли (а также норма прибыли) в капиталистической экономике положительны (больше нуля) тогда и только тогда, когда существует эксплуатация работников.

Утверждение 8. Если эксплуатация работников отсутствует, прибыли в капиталистической экономике равны нулю.

Определение эксплуатации. ТТС называет эксплуатацией труда работников ситуацию, когда работники на свою зарплату могут приобрести лишь такое количество предметов потребления, в котором содержится (овеществлён) меньший труд, чем тот труд, который затратили работники, чтобы получить свою зарплату.

Согласно ТТС Маркса, при капитализме добавленная стоимость перераспределяется между всеми капиталистами (продавцами товаров) пропорционально их авансированным капиталам. Это может вносить некоторые поправки в приведённые выше утверждения ТТС. В частности, возможна ситуация, когда отдельный капиталист (или группа капиталистов) сумели свести живой труд в своих производствах к нулю (полная автоматизация производства), но при этом всё же получают прибыль, как часть суммарной прибыли всех производителей, благодаря постулированному Марксом процессу перераспределения прибыли между капиталистами. Но если рассмотреть случай полной автоматизации ВСЕХ производств, то, согласно ТТС Маркса, в этом случае полная прибыль и добавленная стоимость во всех производствах должны быть равны

[3] Статья написана по итогам дискуссий о Трудовой Теории Стоимости Маркса (ТТС), имевших место на Форуме «Социнтегрум»: http://www.socintegrum.ru/

Автор благодарит Покровского Владимира Николаевича, Калюжного Валерия Васильевича и других участников Форума за конструктивные аргументы, высказанные ими в ходе обсуждения фундаментальных основ ТТС Маркса.

нулю, если затраты живого труда у ВСЕХ производителей равны нулю. Отсюда следует утверждение-9.

Утверждение-9. В капиталистической экономике, в которой не используется живой наёмный труд (достигнута полная автоматизация производства) совокупная прибыль и совокупная добавленная стоимость должны быть равны нулю.

В этой статье мы рассмотрим эти утверждения ТТС на примере трёхсекторной модели капиталистических цен и докажем, что Утверждения 3 – 6, 8 и 9, при обмене товаров по капиталистическим ценам, не выполняются в общем случае произвольно заданной ставки реальной оплаты труда.

Утверждение-7 (фундаментальная теорема Маркса) выполняется, если только выполняется Аксиома 3, то есть, если для капиталистической экономики сохранять за стоимостью товаров то же определение, которое использовалось для стоимости товаров в докапиталистической экономике.

Утверждение-8, как показывают расчёты, не выполняется в экономике, не применяющей наёмный труд. Хотя в этом случае отсутствует объект для эксплуатации, а значит, отсутствует и сама эксплуатация наёмного труда, так как эксплуатировать труд, который не применяется в экономике, очевидно, невозможно, прибыли, как показывают расчёты, будут положительными и в этом случае (в капиталистической экономике, не использующей наёмный труд). Очевидно, эти прибыли в этом случае получены не за счёт эксплуатации, которая в данном случае отсутствует, так как наёмный труд в полностью автоматизированной экономике не применяется. То есть возможна капиталистическая экономика с положительными прибылями, но без эксплуатации рабочих.

Утверждения ТТС, перечисленные выше, выполняются в полной мере только в экономике, где товары обмениваются по стоимости, причём под стоимостью понимается овеществлённый труд «в физиологическом смысле» (назовём её «стоимость-1»). Можно доказать (глава 8) что цены обмена по стоимости-1 совпадают с капиталистическими ценами только если параметр эксплуатации, рассчитанный на основе стоимости-1, равен нулю.

Аксиома-3, на наш взгляд, может быть оспорена. Её принятие придаёт стоимости товаров статус технической величины, не зависящей от социальной формы товарного производства. Эта Аксиома приводит к абсолютизации понятия стоимости и возможности применения этого понятия для описания любых видов экономики, против чего решительно возражал сам Маркс, указывая, что категория «стоимость» является исторической категорией, которая пригодна только для описания рыночной экономики[4].

Мы предлагаем развить этот ход мыслей Маркса и считать «стоимость товаров» эмерджентным свойством экономической сложной адаптивной системы (САС), которое меняется вместе с качественным изменением этой системы. Одним из свойств любых САС является присущий им способ развития, называемый режимом «прерывистого равновесия» (punctuated equilibrium) при котором развитие системы осуществляется в виде циклов, состоящих из относительно длительных фаз плавного постепенного развития и

[4] В первой главе первого тома «Капитала» Маркс поясняет, что в стоимостных отношениях между товарами представлены в вещной форме социальные отношения между производителями – это свойство Маркс назвал «товарный фетишизм». Значит, стоимостные отношения зависят от социальных отношений между производителями и определение стоимости нельзя сводить, как это делают сторонники стандартной версии ТТС, к затратам «мозга, мускулов, нервов, рук и т.д» производителей – чисто техническое определение стоимости, которое зависит лишь от применяемых технических методов производства. Необходимо учитывать также влияние на определение стоимостей социальных производственных отношений. Отсюда можно сделать вывод, что качественные изменения в производственных отношениях должны оказывать влияние на определение стоимостей товаров, а значит и системы цен. Поэтому социальные качественные изменения в обществе должны сопровождаться радикальными ломками системы цен – так называемыми «революциями цен». Исторические факты свидетельствуют, что в истории цен были, как минимум, две такие революции: (1) революция цен 16 века и (2) революция цен второй половины 18 века. Обе связаны с качественными изменениями в производственных отношениях.

относительно коротких периодов глубоких и быстрых качественных изменений. Во время фаз качественных изменений системы конфигурация системы качественно меняется. Меняется положение равновесия и после этого система вступает в новую фазу постепенного развития.

Эти общие принципы развития САС положены в основу нового понимания стоимости, предлагаемого внутри новой версии ТТС.

Согласно новой версии ТТС изменение вида рыночной экономики должно сопровождаться изменением в определении стоимостей товаров. Поэтому формально переносить определение стоимости, верное для одного вида рыночной экономики (например, верное для докапиталистической экономики), на другой качественно иной вид рыночной экономики (например, капиталистическую экономику) кажется нам спорным приёмом логического анализа.

В стандартной версии ТТС (которую мы здесь рассматриваем) существует абсолютизация термина стоимость (отождествление абстрактного труда с трудом «в физиологическом смысле»), и это приводит теорию к парадоксальному выводу, будто при капитализме товары уже не обмениваются по стоимости. То есть, внутри стандартной версии ТТС общий закон рыночной экономики (закон стоимости) перестаёт действовать в качестве регулирующего принципа обмена во всех отдельных актах обмена. Попытка сохранить этот закон на уровне макроскопических агрегатов, предпринятая Марксом, приводит к так называемой «проблеме трансформирования», которая до сих пор не решена, несмотря на множество предложенных способов решить или (чаще) обойти эту проблему с помощью какой-нибудь новой её формулировки.

2. Проблема первая: стандартная версия ТТС - не верифицируемая теория.

Согласно стандартной версии ТТС (в дальнейшем СВ) «абстрактный труд», определяющий стоимость товаров, это – труд «в физиологическом смысле слова», расходование «мозга, мускулов, нервов, рук и т.д.». Хотя формально эти два понятия («абстрактный труд» и «труд в физиологическом смысле») различаются, но внутри СВ до сих пор нет ясного объяснения этого различия, которое могло бы быть использовано для формализации (математически точного описания) термина «абстрактный труд».

С понятиями «абстрактный труд» и «стоимость» Маркс связывал явление товарного фетишизма, существующее внутри рыночной экономики, когда отношения между производителями приобретают форму (вещных) отношений (как стоимостей) между продуктами труда производителей. В то же время термин «труд в физиологическом смысле» вовсе не содержит внутри себя каких-либо свойств социальных отношений товарного фетишизма и мыслится как простое «расходование мозга, мускулов, нервов, рук и т.д.», которое существует в любом виде экономики, не обязательно даже рыночной, но, возможно, и в общинной. Следовательно термины эти «абстрактный труд» и «труд в физиологическом смысле» - разные и СВ формально это признаёт. Но фактически, при рассмотрении числовых примеров, в СВ всегда неявно предполагается, что «абстрактный труд» («абстрактно-всеобщий», «человеческий») это именно труд «в физиологическом смысле слова».

Это неявное отождествление двух разных понятий («абстрактного труда» и «труда в физиологическом смысле») следует из всегда принимаемой в СВ предпосылки, что норма прибавочной стоимости одинакова во всех индустриях. Так как оплата труда пропорциональна затратам труда в «физиологическом смысле», то, если норма прибавочной стоимости одинакова во всех индустриях, то суммарные затраты живого (добавленного) абстрактного труда также будут пропорциональны затратам труда «в физиологическом смысле». И тогда с помощью соответствующего выбора единицы измерения труда «в физиологическом смысле» всегда можно добиться равенства

(совпадения) «абстрактного труда» и «труда в физиологическом смысле». Таким образом, из предположения об одинаковости норм прибавочной стоимости во всех индустриях логически следует, что «абстрактный труд» понимается внутри СВ именно как труд «в физиологическом смысле».

Труд «в физиологическом смысле» Маркс характеризует как «расходование мозга, мускулов, нервов, рук и т.п.». Однако до сих пор не ясно как точно рассчитать теоретически это «расходование….», хотя в теории предполагается, что это можно сделать. Алгоритм такого расчёта до сих пор не найден, хотя предлагались разные варианты, но общего согласия о том, какой вариант расчёта правильный, среди сторонников СВ до сих пор нет.

Предположим, что мы научились определять (рассчитывать как-то) практически это «расходование..» – но в каких единицах – затраты энергии человеческого организма в джоулях или в калориях или, может, в виде массы пота, выделяемого во время работы или ещё как-то. Предположим, что и этот вопрос решили. Но как потом сопоставить эти рассчитанные «расходы мозга, мускулов, нервов и т.п.» между собой – расходование какого органа даст больший вклад в количество труда «в физиологическом смысле»? Расходы мозга или расходы мускулов, а может, расходы нервов?

Например, у учёного основная часть его труда «в физиологическом смысле» – это расходы мозга, у носильщика – расходы мускулов, у прораба – расходы нервов и т.д. Должны ли мы эти расходы разных органов (например, в виде джоулей) учитывать одинаково при составлении общей суммы «расходования мозга, мускулов, нервов, рук и т.д.» или расходы одного органа учитывать в большей степени, чем другого. Например, должны ли мы считать, что расходы мозга дают большую величину труда «в физиологическом смысле», чем такие же расходы мускулов или наоборот.

Понятно, что учёный будет склонен оценивать расходы мозга в большем количестве труда «в физиологическом смысле», чем носильщик, для которого большим трудом будут расходы мускулов, а у прораба большим трудом будут расходы нервов и т.д. Так что известная формула Маркса, что труд «в физиологическом смысле» равен «расходованию мозга, мускулов, нервов, рук и т.п.» ничего не объясняет в алгоритме расчёта этой величины. Если ещё вспомнить, что при расчёте надо учитывать сложность, и качество труда, то становится понятно, что теоретически выполнить такой расчёт вряд ли возможно.

Если даже один исследователь придумает, как правильно просуммировать «расходы мозга, мускулов, нервов, рук и т.д.», то другой исследователь придумает другой способ суммирования и оба дадут аргументированное объяснение своих теорий, но результат расчёта у них будет разный. Потому что такие расчёты субъективны – зависят от интуитивных представлений исследователя, что такое труд – когда он больше, а когда он меньше. Можно пытаться подгонять алгоритм суммирования так, чтобы вычисленные стоимости (овеществлённый труд) совпали бы с фактическими стоимостями товаров, но это будет именно подгонка теории под факты, и в новых условиях подгоночный алгоритм работать не будет.

Таким образом, стандартная версия ТТС, в которой «абстрактный труд» - это фактически труд «в физиологическом смысле» - не имеет надёжного объективного алгоритма для теоретического расчёта стоимостей товаров.

Но тогда её невозможно проверить.

Мы приходим к выводу, что Стандартная версия ТТС – не верифицируемая теория. Её нельзя проверить (верифицировать) сравнением с фактическими данными (например, с ценами). **С точки зрения критерия научности – не верифицируемые теории являются мифами**, то есть теоретическими выдумками, в которые можно лишь верить. Не отсюда ли берёт начало (ставшая правилом в СССР) идеология преклонения перед учением Маркса как перед новым священным писанием и перед самим Марксом как

верховным жрецом. Раз проверить теорию нельзя, а критиковать её запрещено, то остаётся лишь ВЕРИТЬ в неё и преклоняться.

3. Проблема вторая: неоднозначность определения цен товаров при капитализме в Стандартной Версии ТТС.

Хотя не верифицируемые теории невозможно проверить (доказать их правильность путём сравнения теоретических выводов и расчётов с фактическими данными), однако иногда их можно опровергнуть путём сравнения выводов этих теорий с фактами. **Стандартная версия ТТС (СВ) именно такая теория – её нельзя проверить, но можно привести достаточно убедительные доказательства что некоторые её теоретические выводы не верны для капиталистической системы.**

Согласно СВ, товары в капиталистической рыночной экономики продаются по ценам производства, которые в СВ отличаются от цен продажи по стоимости. Чтобы как-то сохранить внутри СВ действие закона стоимости при капитализме – была придумана «проблема трансформирования», которая утверждает, что закон стоимости при капитализме действует только на макроскопическом уровне, определяя равенство стоимостной цены и цены производства не для отдельных товаров, а для макроскопических агрегатов, таких как совокупный общественный продукт и прибавочный продукт (ещё у Маркса встречается общественный совокупный капитал). Проблема состоит в нахождении алгоритма пересчёта стоимостных цен в цены производства, при котором эти макроагрегаты, измеренные в стоимостных ценах, оказались бы равны и при измерении их в ценах производства. Поскольку в текстах Маркса решение этой проблемы отсутствует, разные учёные предлагают свои решения, выискивая в текстах Маркса какие-либо отрывки, которые можно было бы истолковать в пользу придуманного решения. На решение этой «проблемы века» (прошлого и текущего) затрачено было много усилий, а «воз и ныне там», так как среди «решателей» этой проблемы до сих пор нет согласия в понимании, какое решение верное.

В физике «верным» считается решение, которое согласуется с фактами. Если процесс трансформирования стоимостных цен в цены производства действительно происходил в истории, то вызванные такой «трансформацией» изменения цен должны быть обнаруживаемы. И они действительно есть – это революция цен второй половины 18 века в Европе, когда как раз происходило распространение капиталистических методов производства на сферу промышленности в Европе. Данные о ценах (например, Clark[5]) свидетельствуют об общем росте цен в тот период примерно в два раза. Но решения проблемы трансформирования, основанные на инвариантности макроагрегатов, несовместимы с таким общим ростом цен, так как это нарушило бы закон сохранения макроскопических агрегатов[6].

При таком росте цен совокупный общественный продукт, измеренный в стоимостных ценах (которые действовали до начала капитализации промышленности), будет отличаться от такого же по своим физическим объёмам совокупного общественного продукта, измеренного в ценах производства (которые установились по окончании периода капитализации промышленности). То же самое можно сказать и про два других постулата (для прибавочного продукта и общественного капитала), а значит, постулаты инвариантности нарушаются. То есть правила «трансформирования» предложенные СВ не соответствуют историческим фактам.

---

[5] Database GBIH: “England prices and wages since 13th century (Clark)”: http://gpih.ucdavis.edu/Datafilelist.htm

[6] В главе 12 доказывается, что переход к капитализму в промышленности, ставший возможным, благодаря росту производительности труда, должен был сопровождаться снижением, а не ростом цен, если рассматривать соотношение докапиталистических цен обмена по стоимости и капиталистических цен производства. Цены, согласно СВ, должны были понизиться, но фактически они выросли.

При решении проблемы трансформирования обычно пишут две системы уравнений – для стоимостных цен, действовавших в докапиталистической экономике (первая система уравнений) и для цен при капитализме (вторая система) и потом накладывают дополнительно условия инвариантности макроскопических агрегатов. В зависимости от выбора этих агрегатов получаются разные решения или делается вывод об отсутствии решения. Однако в самой математической постановке этой задачи имеется расхождение с исходным Марксовым пониманием задачи.

У Маркса при капитализме товары реализуются по **ценам производства**, тогда как в большинстве постановок проблемы трансформирования (начиная ещё с работы Борткевича[7]) вторую систему составляют для цен равной рентабельности, а НЕ для цен производства[8].

Цена равной рентабельности p_a равна издержкам производства товара $C+V$ плюс средняя прибыль на потреблённый капитал $(C+V)\cdot r$.

$$p_a=(C+V)+(C+V)\cdot r=(C+V)\cdot(1+r) \qquad (1)$$

Здесь r – норма прибыли на потреблённый капитал.

Отметим, что Маркс во втором томе «Капитала» , в главе 20, 2 при рассмотрении числового примера, иллюстрирующего процесс реализации общественного продукта в модели двух подразделений, использует именно цены равной рентабельности[9].

Цены равной рентабельности использовались во многих моделях последователей Маркса для анализа общественного производства и в моделях процесса трансформирования стоимостных цен в цены производства – чаще всего вместо истинных «цен производства» в них фигурируют именно как «цены равной рентабельности». Строго говоря, «цены равной рентабельности» не совпадают с «ценами производства», но, как мы доказываем в главе 12, если норма прибыли достаточно мала, то эти два вида капиталистических цен почти совпадают.

Истинная цена производства p_b, равна издержкам производства плюс средняя прибыль на **авансированный** (инвестированный или вложенный) капитал K.

$$p_b=(C+V)+r\cdot K \qquad (2)$$

Хотя цена равной рентабельности НЕ равна цене производства, при решении «проблемы трансформирования» часто (для упрощения рассуждений и выкладок) используются в рассмотрении именно цены равной рентабельности p_a как приемлемое теоретическое приближение для истинной цены производства p_b.

Если за единицу продукта выбрать такое количество продукта, для производства которого требуется потребление капитала в размере, равном величине авансированного капитала $C+V=K$, то в этом случае формулы (1) и (2) совпадут, но это возможно только благодаря специальному выбору единиц продукта и при условии одинаковой скорости расходования авансированного капитала.

---

[7] Bortkiewicz, L. (1907). On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the Third Volume of Capital. http://gesd.free.fr/bortk07.pdf

[8] Если составлять систему для цен производства, то «трансформирование» всё равно не будет соответствовать фактическим историческим данным о динамике цен во время широкого внедрения системы наёмного труда в промышленности Европы. Никакими ухищрениями нельзя согласовать теорию «трансформации» с динамикой цен (в реальных деньгах, серебре) в этот период – вторая половина 18 века.

[9] В обозначениях Маркса:
подразделение I (средства производства): 4000c + 1000v + 1000m;
подразделение II (предметы потребления): 2000c + 500v + 500m
норма рентабельности в обоих подразделениях одинакова и равна m : (c + v) = 20%

Например, если авансированный в первом подразделении (производство средств производства) капитал потребляется за один год, то выбрав годовой выпуск за единицу продукции первого подразделения, для цены годовой продукции получим:

$$p_1 = (C_1 + V_1) + r \cdot K_1 \quad (3)$$

$$K_1 = C_1 + V_1 \quad (4)$$

При таком выборе единицы продукции цена равной рентабельности единицы продукта первого подразделения будет равна цене производства этой единицы продукта.

Для единицы продукта второго подразделения имеем уравнение цены производства:

$$p_2 = (C_2 + V_2) + r \cdot K_2 \quad (5)$$

Если капитал K_2, вложенный во второе подразделение (производство предметов потребления), также полностью потребляется за год, то $C_2 + V_2 = K_2$, и тогда цена равной рентабельности выпуска предметов потребления будет совпадать с ценой производства. Но в общем случае время полного потребления капитала второго подразделения НЕ равно времени полного потребления капитала первого подразделения, и значит, его цена производства будет отличаться от цены равной рентабельности:

$$C_2 + V_2 \neq K_2 \quad (6)$$

Таким образом, цены равной рентабельности не совпадают с ценами производства. Они совпадают лишь в том случае, если за время производства единицы любого товара, потребляемый в этом производстве капитал совпадает с авансированным для этого производства капиталом.

Отметим, что цены производства являются равновесными ценами в капиталистической экономике, поскольку при этих ценах капитал данной величины, авансированный в разных индустриях, за одинаковое время приносит равные прибыли. Это значит, что при описанном выше выборе единиц товаров (при котором потреблённый для производства этих единиц товаров капитал равен авансированному капиталу) - эти таким способом выбранные единицы товаров должны производиться за одинаковое время, чтобы одинаковые по величине капиталы получали бы за это время одинаковые прибыли. Но очевидно, что это условие одинаковости времени производства специально выбранных единиц продукции в общем случае не выполняется.

Если, например, авансированный в первом подразделении капитал потребляется в течение года (то есть, издержки годового производства средств производства равны по величине авансированному в первом подразделении капиталу), то **специфицированной единицей** будет годовой выпуск средств производства. Однако для годового выпуска предметов потребления потребление капитала (годовые издержки производства) вовсе не обязательно будут равны авансированному во второе подразделение капиталу. И таким образом, в общем случае оба условия: спецификация единиц по признаку равенства издержек производства величине авансированного капитала и спецификация единиц по признаку одинаковости времени их производства – эти два условия вместе чаще всего не выполняются - и поэтому цены равной рентабельности чаще всего отличаются от цен производства.

Учитывая, что равновесные цены при капитализме должны быть ценами производства, приходим к выводу, что модель цен равной рентабельности является лишь приближенным описанием цен производства. В то же время, при особом выборе единиц товаров (в случае, когда оба критерия спецификации выполняются) теоретически можно предположить выполнение равенства цен равной рентабельности и цен производства этих единиц товаров[10]. В этом особом случае рассмотрение модели цен равной рентабельности

[10] В главе 12 доказывается, что цены производства почти совпадают с ценами равной рентабельности, если норма прибыли очень мала. При нулевой норме прибыли обе системы цен будут совпадать.

можно использовать для изучения количественных закономерностей между разными параметрами экономической системы, рассматривая эти цены как модель цен производства в особой капиталистической экономике где оба критерия спецификации выполняются для всех видов товаров.

4. Проблема третья: Противоречия между результатами расчёта цен в модели цен равной рентабельности и основными постулатами стандартной версии ТТС.

Имеются фундаментальные несоответствия между системой математических уравнений для цен при капитализме и общими утверждениями ТТС, перечисленными в Введении к этой статье.

Выберем за единицу средств производства величину годового выпуска средств производства и за единицу предметов потребления годовой выпуск предметов потребления. Эти «единицы» сами являются некоторыми наборами продукции, то есть они являются **составными единицами**. Будем считать, что потребление продукции первого и второго подразделений осуществляется этими наборами и может быть описано как потребление некоторого числа составных единиц (наборов). Тогда система уравнений для цен и балансовые соотношения простого и расширенного производства можно представить в виде простой модели двух подразделений[11].

Пусть условие равенства цен равной рентабельности и цен производства выполняется для единиц обоих подразделений, то есть, капиталы, авансированные в производстве этих двух подразделений, полностью потребляются за одинаковое время (например, год). Тогда мы имеем для цен равной рентабельности (совпадающих в этом случае с ценами производства) систему уравнений:

$$p_1 = (C_1 + V_1)\cdot(1+r); \qquad C_1 + V_1 = K_1 \tag{7}$$

$$p_2 = (C_2 + V_2)\cdot(1+r) \qquad C_2 + V_2 = K_2 \tag{8}$$

Пусть l_1 – живой наёмный труд «в физиологическом смысле» (добавленный в течение года) в первом подразделении, то есть затраченный на производство одной составной единицы средств производства,

Пусть l_2 – живой наёмный труд «в физиологическом смысле» (добавленный в течение года) во втором подразделении , то есть затраченный на производство одной составной единицы предметов потребления,

Пусть w – реальная ставка оплаты наёмного труда «в физиологическом смысле», то есть количество (составных) единиц предметов потребления, которые рабочие могут купить за оплату своего единичного труда «в физиологическом смысле».

Пусть L_2 – труд «в физиологическом смысле», овеществлённый в (составной) единице предметов потребления.

Параметр нормы эксплуатации труда в СВ (нормы прибавочной стоимости) равен отношению не оплаченного труда «в физиологическом смысле» к оплаченному труду в физиологическом смысле, который овеществлён в предметах потребления рабочих. То есть, параметр нормы эксплуатации равен отношению:

$$e = \frac{l_k - w\cdot L_2\cdot l_k}{w\cdot L_2\cdot l_k} = \frac{1 - w\cdot L_2}{w\cdot L_2} \tag{9}$$

[11] С последующим добавлением к ним сектора производства особого товара (драгоценных металлов), выполняющего функции денег.

l_k – живой труд рабочих подразделений $k = 1;2$, необходимый для производства одной составной единицы продукта (годового выпуска первого или второго подразделения),

$w \cdot L_2 \cdot l_k$ – оплаченный труд, равный труду, который овеществлён в предметах потребления рабочих, которые они покупают за оплату своего труда l_k по производству (составной) единицы продукта.

Из формулы (9) следует, что норма эксплуатации равна нулю $e = 0$, если ставка реальной оплаты труда удовлетворяет условию:

$$w \cdot L_2 = 1 \tag{10}$$

Мы покажем далее (главы 10 и 11), что условие отсутствия эксплуатации (10) математически эквивалентно условию обращения прибылей в ноль, если стоимость единицы предметов потребления L_2 определять по тому же алгоритму, по которому рассчитывается стоимость этой единицы в докапиталистической экономике. И в этом случае выполняется «фундаментальная теорема Маркса» (Утверждение 7).

Однако при другом определении стоимости предметов потребления, которое учитывает влияние капиталистических производственных отношений на определение стоимостей товаров при капитализме, положительные прибыли возможны и при отсутствии эксплуатации труда. Следовательно, положительные прибыли нельзя рассматривать как следствие эксплуатации труда, как это утверждает теория прибавочной стоимости Маркса. Как показывают расчёты, прибыли могут быть положительными, даже если капиталисты не используют наёмный труд.

Мы докажем далее, что в капиталистической экономике, не применяющей наёмный труд (полностью автоматизированная экономика), прибыль может быть положительной, хотя эксплуатация в этом случае отсутствует, так как эксплуатировать просто некого (наёмные работники не используются в производстве).

Все эти результаты несовместимы с гипотезой, согласно которой, положительные прибыли всегда являются следствием эксплуатации наёмных работников. Возможны положительные прибыли и без эксплуатации наёмного труда.

В формулах (7)-(8) использованы обозначения:

p_1 – цена (составной) единицы средств производства

p_2 – цена (составной) единицы предметов потребления.

$C_{1;2}$; $V_{1;2}$ - постоянный и переменный потреблённый капиталы (издержки производства), выраженные в деньгах.

Издержки производства в ценах на производство составных единиц средств производства и предметов потребления равны:

$C_1 = p_1 \cdot a_1$ – цена средств производства, потребляемых при производстве единицы средств производства,

$V_1 = p_2 \cdot w \cdot l_1$ – цена предметов потребления, потребляемых (рабочими) при производстве единицы предметов потребления,

$C_2 = p_1 \cdot a_2$ – цена средств производства, потребляемых при производстве единицы предметов потребления,

$V_2 = p_2 \cdot w \cdot l_2$ – цена предметов потребления, потребляемых при производстве единицы предметов потребления.

Тогда система (7) – (8) перепишется в виде:

$$p_1 = \left(p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot w \cdot l_1\right) \cdot \left(1 + r\right) \tag{11}$$

$$p_2 = \left(p_1 \cdot a_2 + p_2 \cdot w \cdot l_2\right) \cdot \left(1 + r\right) \tag{12}$$

К уравнениям (11)-(12) необходимо также добавить ещё уравнение, описывающее производство реальных денег, например, золота или (и) других драгоценных металлов. Часть производства денежных металлов используется как средство производства (например, в приборостроении), другая часть - как предметы потребления (украшения), третья часть сберегается и четвёртая часть идёт на чеканку монеты или обеспечение размена бумажных денежных знаков на реальные деньги. Для этой индустрии (обозначим её индексом 0) аналогично формулам (11) и (12) составляем равенства:

$p_0 \equiv 1$ – то есть цена количества металла, из которого отчеканена ОДНА денежная единица, всегда равна ОДНОЙ денежной единице.

Так как денежный металл может применяться и как средство производства, и как предмет потребления, и для чеканки монеты, необходимо учесть расходование этого металла в издержках производства, внеся соответствующие поправки в уравнения (11) и (12). Необходимо также дополнить систему этих уравнений ещё уравнением для цены металла, из которого отчеканена монета достоинством в одну денежную единицу.

$$\left(d_0 + p_1 \cdot a_0 + p_2 \cdot w \cdot l_0\right) \cdot \left(1 + r\right) = p_0 = 1$$

Здесь (и далее) использованы следующие обозначения для потребления единиц денежного металла при производстве единицы продукции:

d_0 – количество единиц денежного металла (одна единица денежного металла выбрана так, что её цена всегда равна одной денежной единице), используемых для производства единицы денег (перечеканка монеты)

d_1 – количество единиц денежного металла, используемых для производства (составной) единицы средств производства

d_2 – количество единиц денежного металла, используемых для производства (составной) единицы предметов потребления.

Масса денежного металла измеряется в денежных единицах, так как за единицу массы денежного металла выбирается масса металла, из которого сделана монета достоинством в одну денежную единицу.

С учётом потребления денежного металла, получаем систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} \left(d_0 + p_1 \cdot a_0 + p_2 \cdot w \cdot l_0\right) \cdot \left(1 + r\right) = p_0 = 1 & (13) \\ \left(d_1 + p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot w \cdot l_1\right) \cdot \left(1 + r\right) = p_1 & (14) \\ \left(d_2 + p_1 \cdot a_2 + p_2 \cdot w \cdot l_2\right) \cdot \left(1 + r\right) = p_2 & (15) \end{cases}$$

4.1. Решение системы уравнений для цен равной рентабельности.

Систему уравнений для цен равной рентабельности (13) – (15) удобно записать в матричном виде, введя **социо-техническую матрицу** прямых затрат A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ w \cdot l_0 & w \cdot l_1 & w \cdot l_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Социо-техническая матрица A_1 содержит в себе не только расходование средств производства на единицу продукции (первая и вторая строки), но и расходование предметов потребления работников купленных на оплату их труда по производству единицы продукции (третья строка).

Матрица прямых материальных затрат A не содержит внутри себя потребление предметов потребления работников для производства единицы товаров. То есть третья строка нулевая.

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Введём вектор-строку равновесных цен:

$$\vec{P} = \left(p_0 \equiv 1;\ p_1;\ p_2 \right) \tag{18}$$

Тогда систему (13)-(15) можно записать в виде уравнения на собственные значения и собственные вектора социо-технической матрицы:

$$\vec{p} \cdot A_1 = \Lambda \cdot \vec{p}\ ; \qquad \Lambda \equiv \frac{1}{1+r} \tag{19}$$

Мы ищем положительный собственный вектор, которому, согласно теореме Фробениуса-Перрона[12], соответствует максимальное по модулю положительное собственное значение Λ [13] матрицы A_1. Это собственное значение находим из решения характеристического уравнения:

$$\det\left(A_1 - \Lambda \cdot I \right) = 0\ ; \tag{20}$$

I - единичная матрица.

Искомое максимальное по модулю собственное значение Фробениуса (корень Перрона) обозначим как Λ_F.

$$\Lambda_F \equiv \frac{1}{1+r} \tag{21}$$

Находим собственный вектор Фробениуса, соответствующий собственному значению Λ_F. Это и будет искомый вектор цен, если его нормировать таким образом, чтобы выполнялось равенство $p_0 \equiv 1$.

Расчёты для решения системы уравнений (13) – (15) были выполнены в программе Mathematica 10.4. Текст программ и результаты расчётов собраны в Приложении 2.

---

[12] Соответствующие теоремы о спектральном радиусе (числе Фробениуса, корне Перрона – другие названия) неотрицательных матриц приведены в книге: Альпин Ю. А. (2015) Неотрицательные матрицы. Казань. Казанский федеральный университет. Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского.

[13] Это собственное значение равно спектральному радиусу неотрицательной матрицы A_1. Его называют также «корень Перрона».

Вычисление собственных значений и собственных векторов в программе Mathematica 10.4 реализуется с помощью функций Eigenvalues и Eigenvectors. Если элементы матрицы заданы символическими выражениями, то результат вычислений тоже будет символическим выражением. Поскольку матрица A_1 размерности 3×3, то вычисление даёт три собственных вектора и три собственных значений. Отбор положительного вектора осуществляется после задания числовых значений параметров системы уравнений.

Наши расчёты показали, что при вычислении собственных значений и собственных векторов для матрицы с символическими значениями элементов, в качестве собственного значения Фробениуса (максимального по модулю) надо брать (при принятых числовых значениях параметров) третье (последнее в списке) собственное значение. Аналогично, соответствующий ему собственный вектор Фробениуса стоит на третьем (последнем) места в списке собственных векторов.

Отметим, что при вычислении собственных значений для матрицы с числовыми элементами, порядок в списке обратный, первое собственное значение будет самым большим и далее собственные значения убывают по модулю.

При вычислениях для символических матрицы с символическими элементами собственный вектор нормирован так, чтобы последняя его компонента была равна единице. При вычислениях для числовых матриц это условие нормировки не выполняется. Более детально вопросы отбора собственного значения и вектора Фробениуса из выдаваемых программой Mathematica 10.4 списков этих величин – рассмотрены в главе 6.

После задания числовых значений параметров следует брать первые в списках значения собственного значения и собственного вектора. При вычислении символических формул следует (для выбранных нами числовых значениях параметров) брать последний элемент в списке собственных значений и последний собственный вектор в списке собственных векторов[14].

Прибыль равна разнице между ценой и издержками производства

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \vec{p} \cdot A_1 = \left(1 - \Lambda_F\right) \cdot \vec{p} = \frac{r}{1+r} \cdot \vec{p} \qquad (22)$$

В связи с приведёнными формулами расчёта прибыли возникает вопрос – какой будет прибыль, если используемый в экономике живой наёмный труд по производству средств производства и предметов потребления свести к нулю – предельный случай применения трудо-сберегающих технологий – полностью автоматизированная экономика.

Решения системы (13)-(15) показывают, что и в этом предельном случае вектор цен будет положительным, норма прибыли будет больше нуля и прибыли также будут положительными[15].

Например, задаём параметры экономики, не применяющей труд наёмных рабочих в обоих подразделениях[16]:

$$d_0 = 0.2;\ d_1 = 0.02;\ d_2 = 0.06;\ a_0 = 0.1;\ a_1 = 0.4;\ a_2 = 0.5;\ l_0 = 0.1;\ l_1 = l_2 = 0;\ w = 0.1 \qquad (23)$$

Решение системы (13) – (15) при этих параметрах:

[14] Имеется область параметров, для которых собственное число и собственный вектор Фробениуса будет первым в списке символических собственных значений и векторов в программе Mathematica. Это связано с встроенным в программу Mathematica 10.4 алгоритмом нумерации собственных значений и векторов. Подробнее обсуждение этого пункта – в главе 6.

[15] Все величины: прибыль, зарплата и добавленная стоимость рассчитаны для единицы продукта.

[16] Если наёмный труд не применяется во всех трёх секторах, включая сектор производства драгоценных металлов, то результат будет тот же – цены и прибыли останутся положительными.

$$p_1 = 1.8655006453662422$$
$$p_2 = 2.4170918085214357 \qquad (24)$$
$$r = 1.4347429089609625$$

Прибыли π_1 и π_2 первого и второго подразделений равны:

$$\pi_1 = \left(\frac{r}{1+r}\right)\cdot p_1 = 1.0993003872197453$$
$$\pi_2 = \left(\frac{r}{1+r}\right)\cdot p_2 = 1.4243414858383148 \qquad (25)$$

Программы расчётов, выполненные в Mathematica 10.4, собраны в Приложении-2.

Прибыли остаются положительными даже если прямые затраты живого труда во всех секторах отсутствуют $l_0 = l_1 = l_2 = 0$. Этот предельный случай экономики без использования трудового ресурса рассмотрен в Приложении-2: Program-1a (символические вычисления) и Program-2a (числовой пример).

То есть в нашем числовом примере прибыли положительны, хотя затраты наёмного живого труда равны нулю $l_1 = l_2 = 0$. Так как добавленная стоимость равна сумме оплаты труда и прибыли, можно сделать вывод, что добавленная стоимость в нашем числовом примере будет равна прибыли и, следовательно, будет тоже положительной, хотя наёмный труд в нашей экономике вообще не используется.

Поскольку в нашей модели единицами товаров являются годовые выпуски первого и второго подразделений, то объяснить положительные прибыли и добавленные стоимости при нулевых затратах наёмного живого труда с помощью перераспределения добавленной стоимости между производителями - нельзя, так как единицы рассмотренных составных товаров включают в себя годовое производство всех производителей. Таким образом, полученный результат противоречит фундаментальным утверждениям 3 и 4 стандартной версии ТТС[17], перечисленным во Введении.

Можно построить графики зависимости прибылей в секторах от затрат живого труда l1 и l2. На **Графиках 1 и 2** показаны зависимости прибылей первого и второго подразделений от затрат живого труда в физиологическом смысле в этих подразделениях при параметрах (23). Видим, что прибыли положительны при нулевых затратах живого труда.

[17] Если считать, что весь используемый капиталистами живой труд – это труд наёмных рабочих. Если используется также живой труд капиталистов, который не входит в социо-техническую матрицу и не фигурирует в системе уравнений (13) – (15), то положительность прибылей при отсутствии затрат наёмного труда, можно согласовать с Утверждениями 3 и 4, считая, что имеются также не учтённые затраты труда самих капиталистов, благодаря которым и создаётся добавочная стоимость и прибыли в экономике, не использующей наёмный труд. Возможные объяснения положительных прибылей при нулевых затратах живого труда – рассмотрим позже.

График 1. Зависимость прибыли в цене единицы товаров первого подразделения (средств производства) от затрат живого труда на производство единицы продукта в этом подразделении.

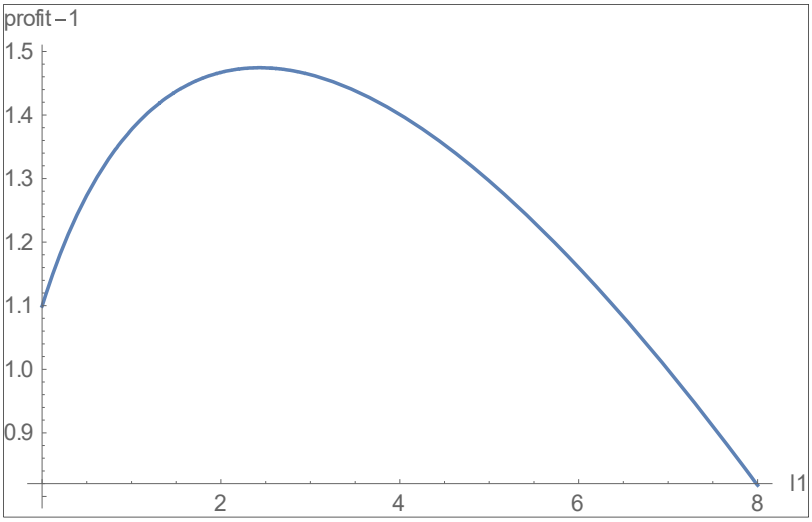
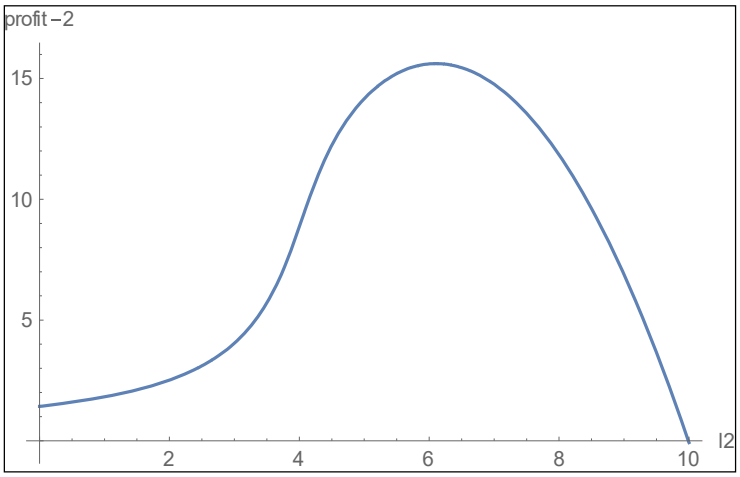


График 2. Зависимость прибыли в цене единицы товаров второго подразделения (предметов потребления) от затрат живого труда на производство единицы продукта в этом подразделении.



Графики построены для значений параметров (23), приведённых выше. Использовалась программа Mathematica 10.4. – Program-2 Приложения 2.

Графики 1 и 2 показывают, что прибыли (в зависимости от затрат наёмного живого труда) положительны и растут с ростом затрат живого наёмного труда до определённого максимума после чего падают до нуля. Это связано с тем, что увеличение затрат живого труда увеличивает коэффициенты третьей строки матрицы A_1 и, как следствие, увеличивается собственное значение Фробениуса Λ_F этой матрицы[18], а значит, падает норма прибыли r и величина прибыли в цене единицы товара, вследствие формулы (21) и формулы (26):

[18] Собственное число Фробениуса (корень Перрона) равен спектральному радиусу матрицы A_1, который монотонно зависит от элементов этой матрицы. Вследствие этого, увеличивая (или уменьшая) элементы третьей сроки, мы увеличиваем (уменьшаем) спектральный радиус, то есть, повышаем (понижаем) корень Перрона. Теорема о монотонности спектрального радиуса неотрицательной неразложимой матрицы приведена в книге: Альпин Ю. А. (2015) Неотрицательные матрицы. Казань. Казанский федеральный университет. Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, стр. 35, Теорема 2.

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \vec{p} \cdot A_1 = \vec{p} \cdot \left(1 - \Lambda_F\right) = \vec{p} \cdot \frac{r}{1+r} \qquad (26)$$

Нулевой норме прибыли соответствует собственное значение социо-технической матрицы A_1, равное единице $\Lambda_F = 1 \;\Leftrightarrow\; r = 0$.

Эти результаты расчёта не зависят от предположений о выборе единиц товаров и от того, какое производство – простое или расширенное рассматривается. Система (13)-(15) описывает систему равновесных цен равной рентабельности при произвольном выборе единиц товаров.

Поэтому полученный вывод совершенно общий – прибыли в единицах товаров НЕ обращаются в ноль, если наёмный живой труд, затраченный на производство средств производства и предметов потребления (а также живой наёмный труд во всех трёх секторах), обращается в ноль. Но это значит, что прибыль нельзя рассматривать как неоплаченную часть наёмного живого труда наёмных рабочих, а значит, вся теория Маркса, объясняющая происхождение капиталистических прибылей эксплуатацией рабочих ставится под вопрос.

Наше решение доказывает, что в капиталистической экономике кроме прибыли от эксплуатации наёмных рабочих существует ещё прибыль иного происхождения, возникающая не из-за эксплуатации наёмных рабочих. Именно эту прибыль мы фиксируем, когда в рассмотренном числовом примере снижаем затраты наёмного труда до нуля. Прибыль при этом не обращается в ноль, как и добавленная стоимость в денежном выражении.

В полностью автоматизированной экономике, в которой затраты живого наёмного труда обращаются в ноль, прибыль всё же остаётся положительной. Значит, прибыль – это не только не оплаченный труд наёмных рабочих, как думал Маркс, и продолжают так думать многие его последователи. Возможна положительная прибыль без эксплуатации рабочих.

Кроме этого, так как вся добавленная стоимость, согласно Аксиоме 1 и Утверждению 1 из Введения, создаётся живым трудом и равна величине затраченного живого труда, она, согласно стандартной версии ТТС, также должна обращаться в ноль, если затраты живого труда становятся равными нулю[19].

Однако согласно Аксиоме 2, добавленная стоимость как сумма заработной платы и прибыли будет положительной, так как в нашем числовом примере прибыль положительна даже когда живой труд не применяется.

Это означает, что добавленная стоимость, а значит и прибыль (прибавочная стоимость) создаётся не только наёмным живым трудом в физиологическом смысле или, если сохранять за добавленной стоимостью смысл затрат абстрактного труда, то абстрактный труд не совпадает с трудом в физиологическом смысле, а значит, основное положение стандартной версии ТТС нуждается в уточнении.

---

[19] Это верно, если весь живой труд – это наёмный труд и стоимость создаётся только наёмным трудом. Если же учитывать труд капиталистов в составе живого труда (который не включён в социо-техническую матрицу и затраты на содержание которого не входят в издержки производства), то Аксиома-1 и Утверждение-1 можно сохранить, если в состав живого труда включить труд самих капиталистов. Возможно, что более глубокое объяснение положительных прибылей при нулевых затратах живого наёмного труда может быть дано в рамках теории замещающей (труд) работы оборудования, являющейся, предположительно, одним из факторов создания новой стоимости (Покровский, В. Н. (2025). Мифы капитализма и математические законы общественного производства. Общедоступные очерки хозяйственной деятельности. Москва июнь 2025).
Согласно новой версии ТТС, возможно также, что положительность прибылей при отсутствии затрат живого наёмного труда «в физиологическом смысле» можно объяснить, отказавшись от принятого (неявно) в СВ отождествления «абстрактного труда» и «труда в физиологическом смысле». Даже если «труд в физиологическом смысле» стремится к нулю, «абстрактный труд» может стремиться к некоторому конечному не нулевому пределу и поэтому при нулевом труде «в физиологическом смысле», «абстрактный труд» может быть отличен от нуля.

Ставка реальной оплаты труда w, при которой выполняется условие отсутствия эксплуатации (10) и параметр эксплуатации обращается в ноль ($e = 0$) равна.

$$w = w_0 = \frac{1}{L_2} \tag{27}$$

Овеществлённый в единице предметов потребления труд “в физиологическом смысле” L_2 находим по известному алгоритму расчёта полных затрат труда “в физиологическом смысле”.

Вводим вектор-строку прямых затрат наёмного живого труда “в физиологическом смысле” на единицу товара.

$$\vec{l} = \{l_0; l_1; l_2\} \tag{28}$$

Составляем матрицу C которая связана с матрицей прямых материальных затрат формулой:

$$C = (I - A)^{-1} \tag{29}$$

Вектор полных затрат труда в единице продукции находим по формуле:

$$\vec{L} = \vec{l} \cdot C \tag{30}$$

$$\vec{L} \equiv \{L_0; L_1; L_2\} \tag{31}$$

Третья компонента полученного вектора $\vec{L}$ даст нам стоимость единицы предметов потребления L_2, если не учитывать возможность влияния социальной формы труда на алгоритм расчёта стоимостей товаров. Дело в том, что формула расчёта (30) используется для расчёта полных затрат овеществлённого труда «в физиологическом смысле» (стоимостей товаров, согласно СВ) для докапиталистической экономики, так как элементы матрицы A вообще не зависят от ставки оплаты наёмного труда w.

Согласно Аксиоме 3, приведённой во Введении этой статьи, **СВ отождествляет стоимость товара, рассчитанную для докапиталистической экономики по формуле (30), со стоимостью этого товара, произведённого в условиях капитализма, что не является очевидным допущением**[20]. Поскольку однако СВ такое предположение делает, используем формулу (30) для нахождения «стоимостей» товаров. Приведём результат расчёта.

$$L_0 = \frac{(1-a_1)l_0 + a_0 l_1}{(1-a_1)(1-d_0) - a_0 d_1} \tag{32}$$

$$L_1 = \frac{(1-d_0)l_1 + d_1 l_0}{(1-a_1)(1-d_0) - a_0 d_1} \tag{33}$$

$$L_2 = \frac{d_2\left(l_0(1-a_1) + a_0 l_1\right) + a_2\left(d_1 l_0 + l_1(1-d_0)\right)}{(1-a_1)(1-d_0) - a_0 d_1} + l_2 \tag{34}$$

Формулы (32) – (34) выведены в Program-1 Приложения 2.

На **Графиках 3 и 4** приведены Графики (Program-2 Приложения 2) добавленной стоимости и прибыли второго и третьего секторов. Расчёты выполнены при значениях параметров (23) при фиксированной ставке оплаты труда.

Прибыль и добавленная стоимость НЕ обращаются в ноль даже при нулевых затратах наёмного живого труда, то есть фундаментальные утверждения 1, 3 и 4 ТТС перечисленные во Введении к этой статье, – не выполняются. Прибыль не равна нулю

[20] Аксиома-3 в ТТС выполняет ту же роль, что и пятый постулат Эвклида в геометрии. В геометрии отказ от пятого постулата приводит к логически непротиворечивой неэвклидовой геометрии. В ТТС отказ от Аксиомы-3 также приводит к новому развитию основных принципов этого экономического течения. Приняв Аксиому-3,мы получаем – стандартную версию ТТС, а отказавшись от Аксиомы-3 – получим – новую версию ТТС.

даже когда живой труд не применяется. Это значит, что причиной существования прибыли нельзя считать только лишь эксплуатацию наёмного труда работников.

В то же время, если построить графики прибыли при ставке оплаты труда, которая соответствует отсутствию эксплуатации труда, при том определении стоимостей, которое используется в докапиталистической экономике (формула (10)), то прибыли тождественно обратятся в ноль при любых значениях затрат живого труда – **Графики 5 и 6**.

График 3. Добавленная стоимость (красный цвет) и прибыль (синий цвет) в единице продукции первого подразделения как функция затрат живого труда в первом подразделении.

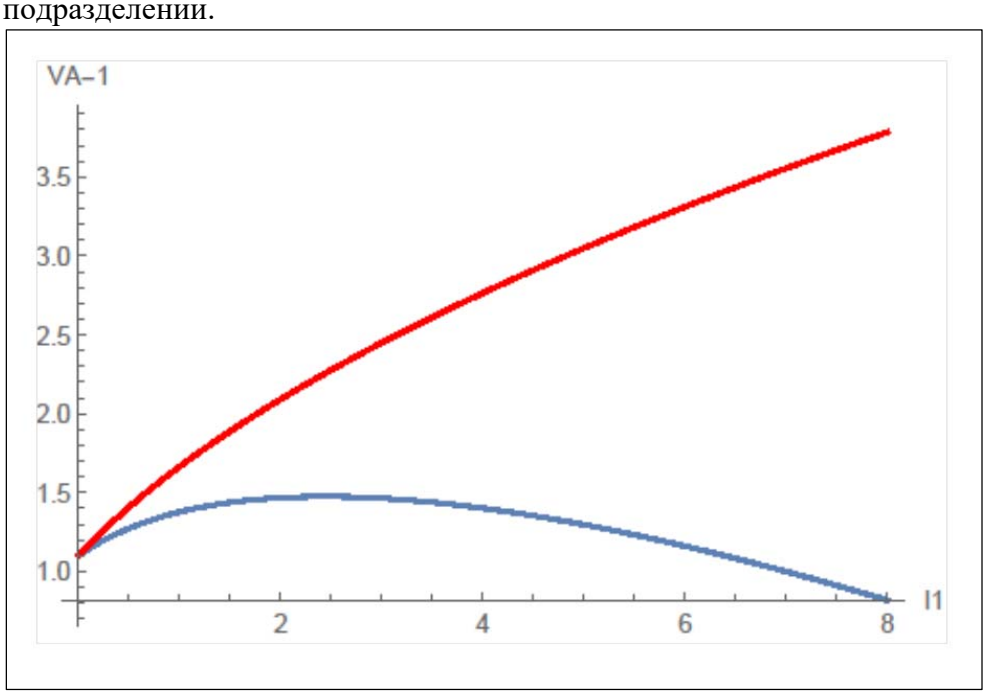


График 4. Добавленная стоимость (красный цвет) и прибыль (синий цвет) в единице продукции второго подразделения как функции затрат живого труда во втором подразделении.

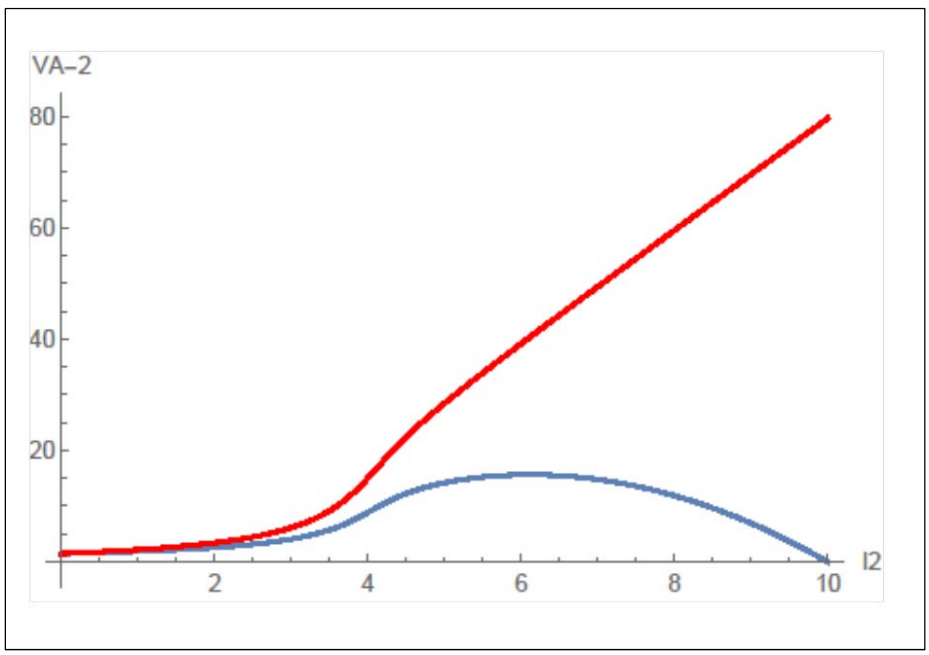


График 5. Зависимость прибыли первого подразделения от затрат труда в физиологическом смысле при условии отсутствия эксплуатации.

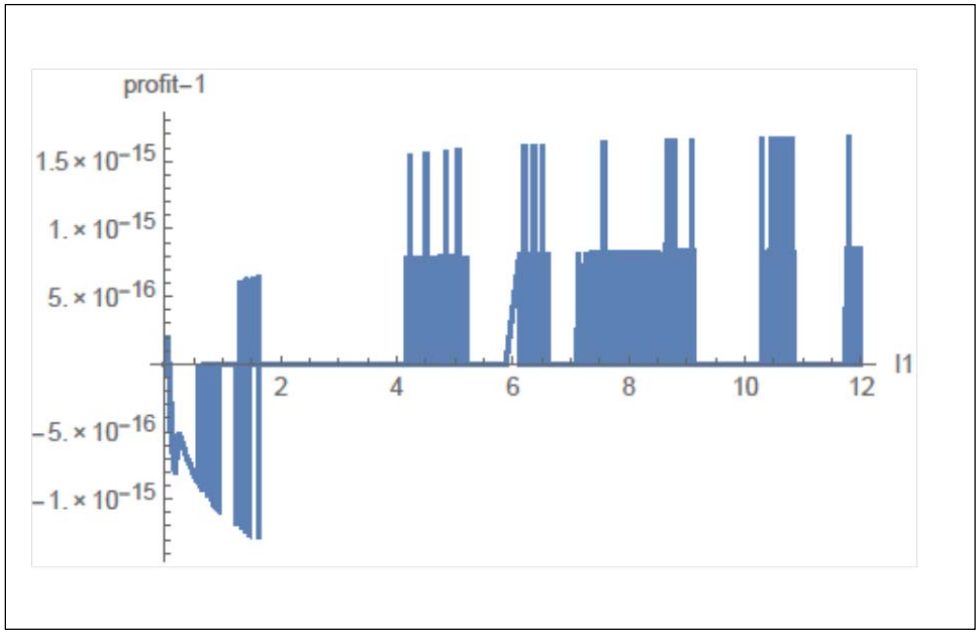


График 6. Зависимость прибыли второго подразделения от затрат труда в физиологическом смысле при условии отсутствия эксплуатации.

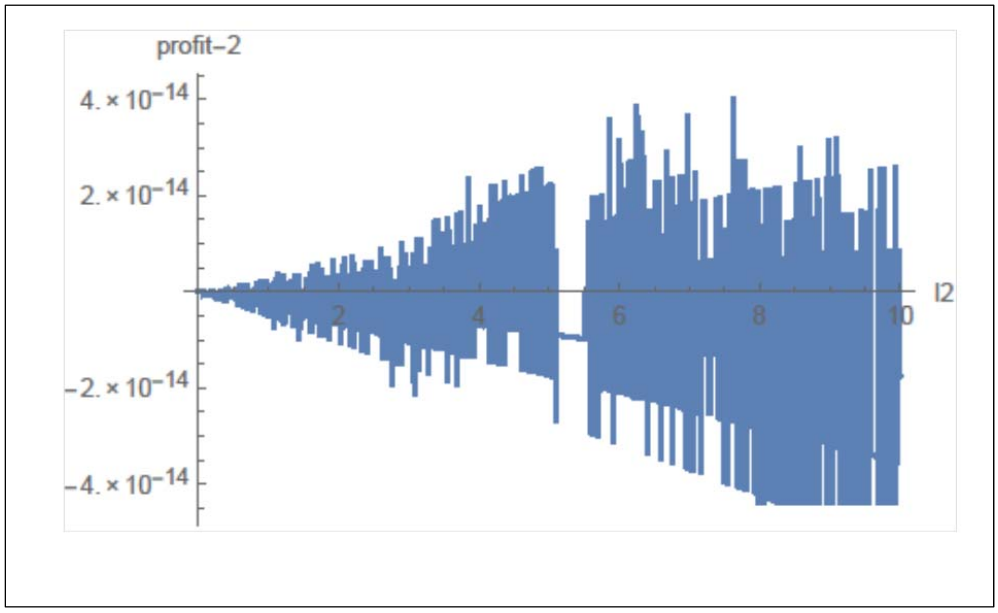


График 7. Зависимость добавленной стоимости сектора производства денежного металла от реальной ставки оплаты труда “в физиологическом смысле” при фиксированных затратах живого труда во всех подразделениях ($l_1 = 0.01;\ l_2 = 0.02$).

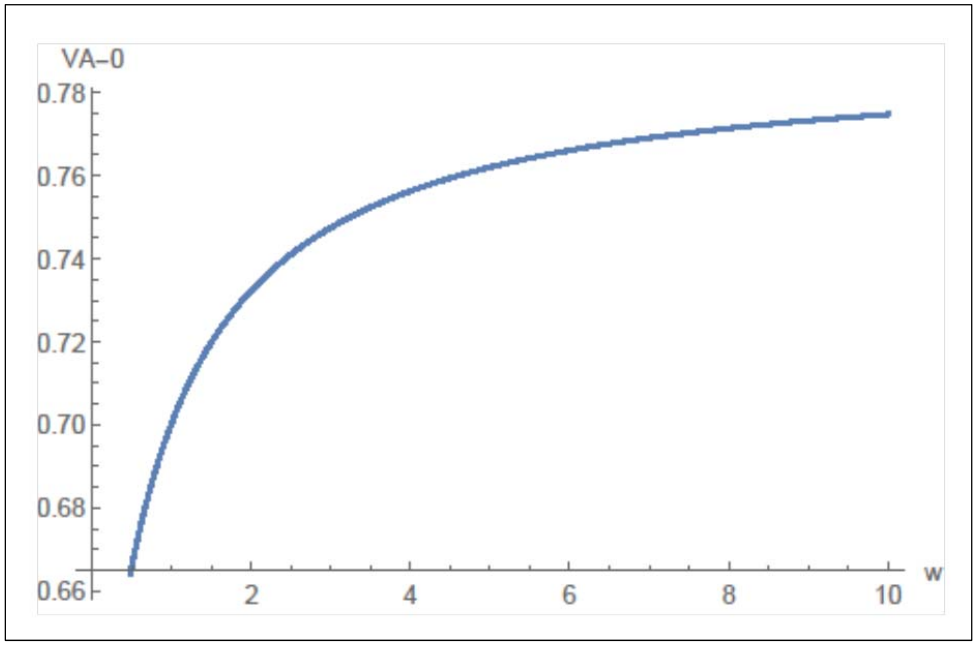


График 8. Зависимость добавленной стоимости первого подразделения от реальной ставки оплаты труда в физиологическом смысле при фиксированных затратах живого труда в обеих подразделениях ($l_1 = 0.01;\ l_2 = 0.02$).

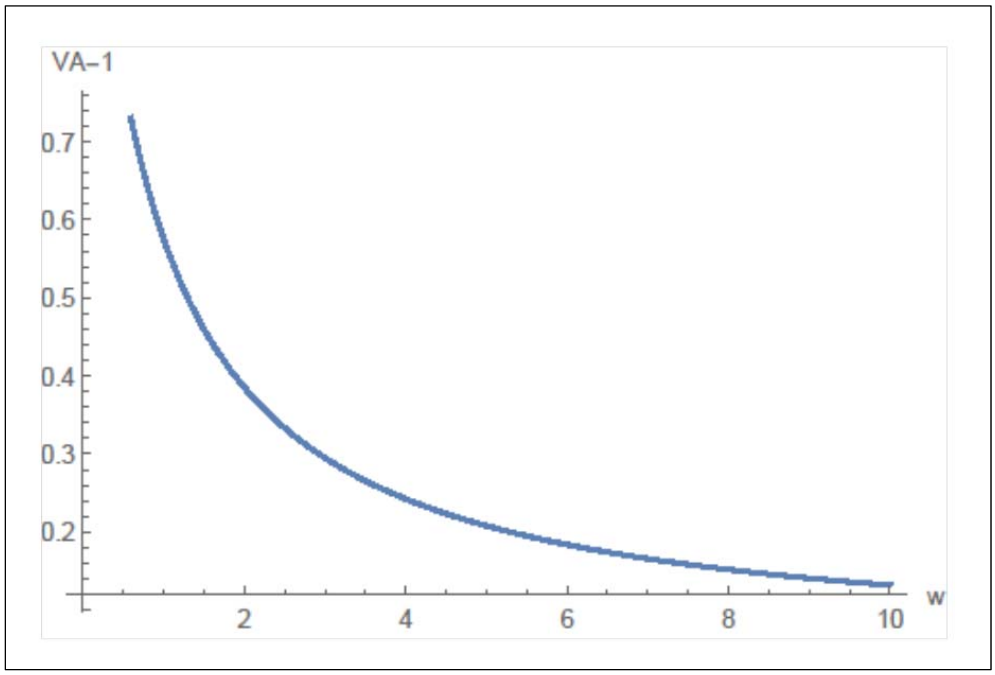


График 9. Зависимость добавленной стоимости второго подразделения от реальной ставки оплаты труда в физиологическом смысле при фиксированных затратах живого труда в обеих подразделениях ($l_1 = 0.01;\ l_2 = 0.02$).

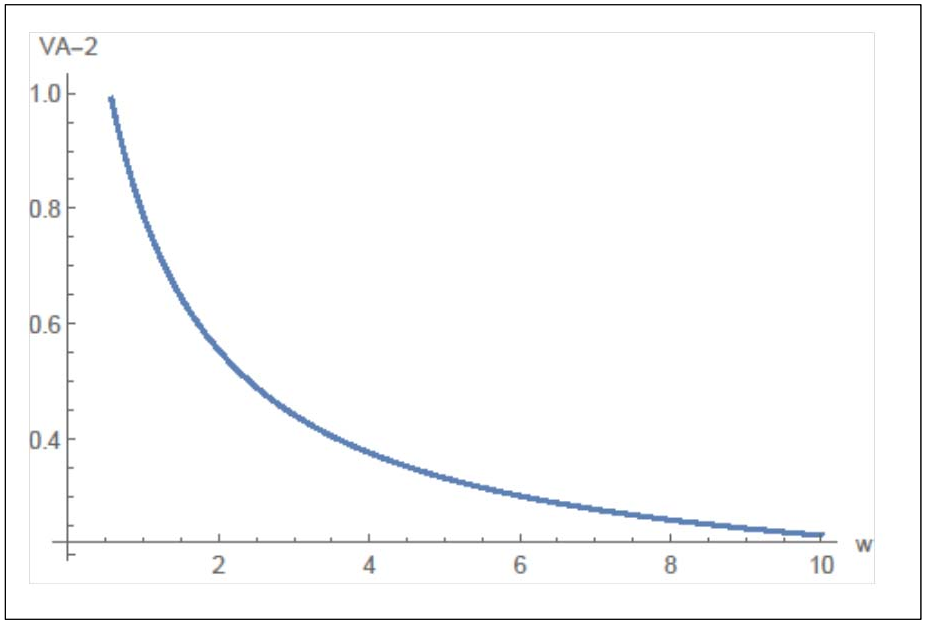


График 10. Зависимость нормы рентабельности (нормы прибыли на потреблённый капитал) от реальной ставки оплаты труда “в физиологическом смысле” при фиксированных затратах живого труда в обеих подразделениях ($l_1 = 0;\ l_2 = 0$ - синий сплошной и $l_1 = 0.01;\ l_2 = 0.02$ - пунктир).

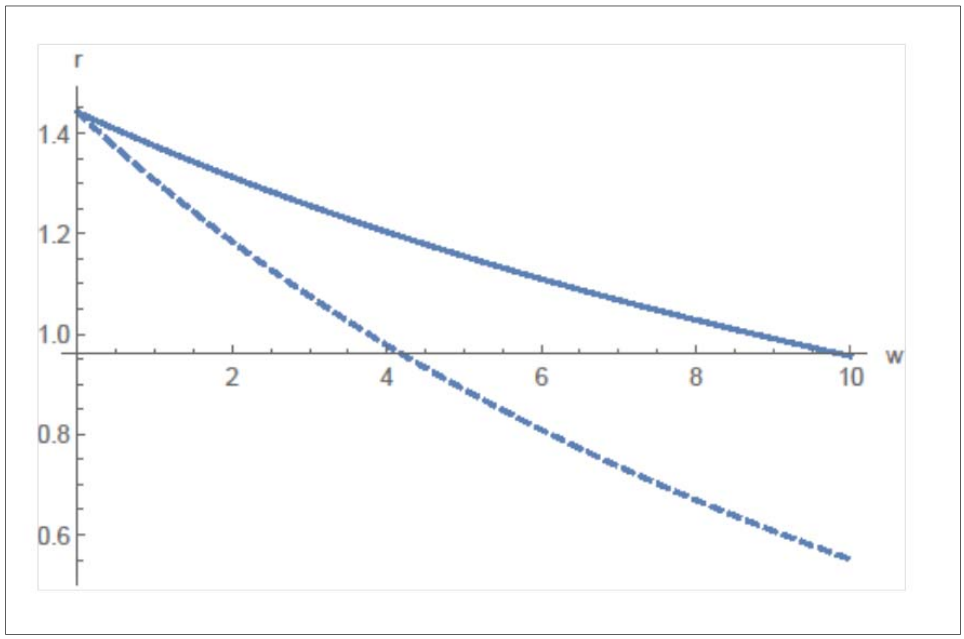


График 11. Зависимость реальной ставки оплаты “труда в физиологическом смысле” при отсутствии эксплуатации от затрат живого труда в первом подразделении ($l_2 = 0$).

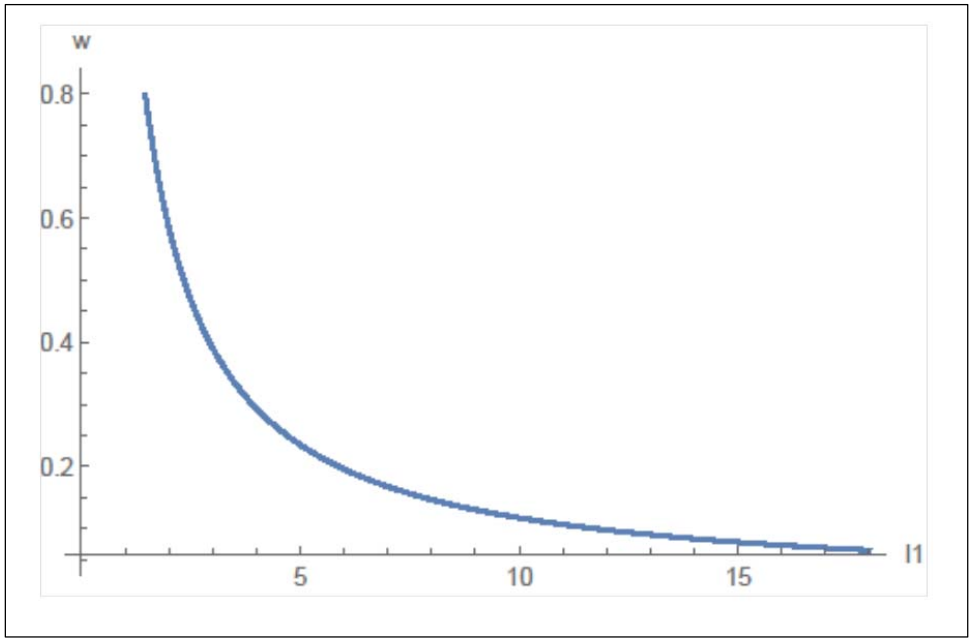


График 12. Зависимость реальной ставки оплаты труда в физиологическом смысле при отсутствии эксплуатации от затрат живого труда во втором подразделении ($l_1 = 0$).

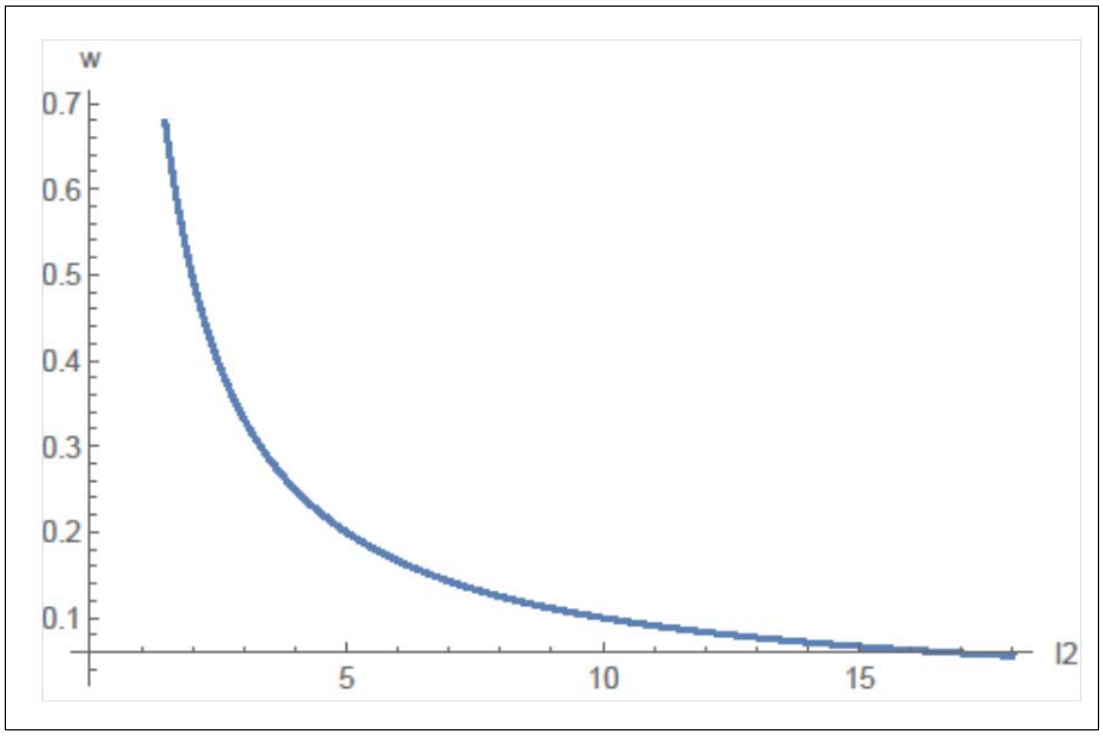
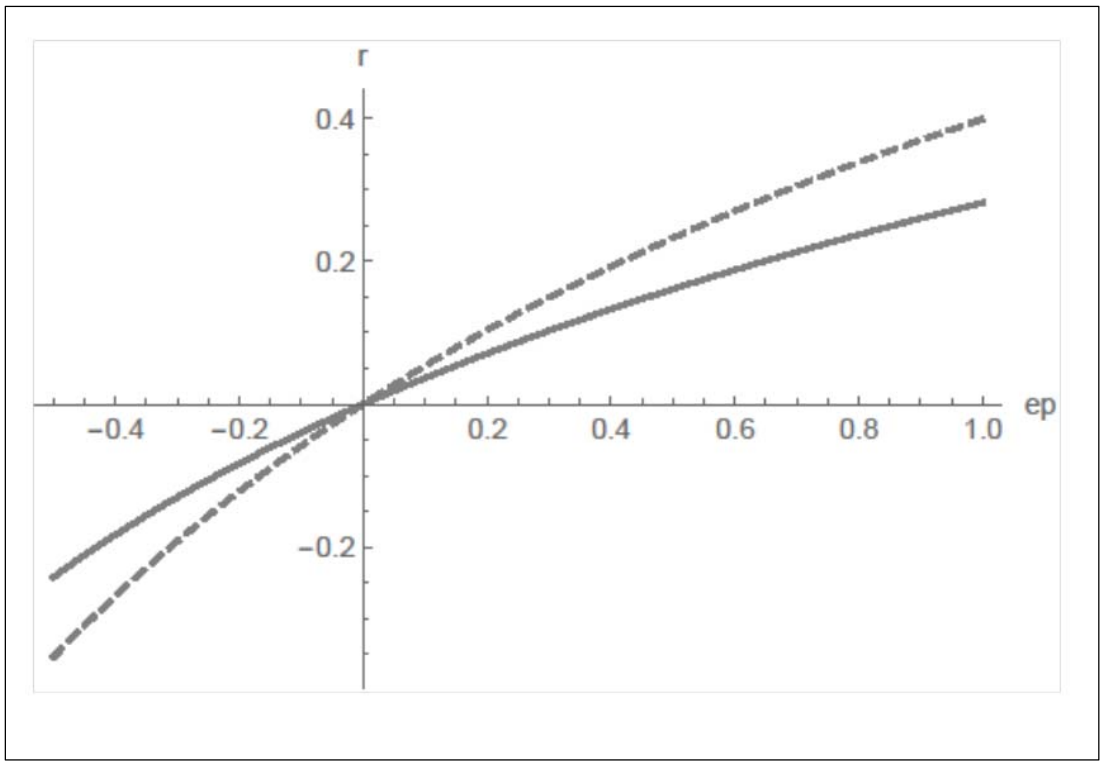


График 13. Зависимость нормы рентабельности (нормы прибыли на потреблённый капитал) от нормы эксплуатации (ep)[21] труда работников при фиксированных затратах живого труда в обеих подразделениях ($l_1 = 0;\ l_2 = 0$ - серый сплошной и $l_1 = 0.01;\ l_2 = 0.02$ - серый пунктир).



[21] Параметр эксплуатации (норма прибавочной стоимости) в расчётных программах обозначается символом “ep”.

4.2. ВЫВОДЫ:

Перечислим некоторые нетривиальные для ТТС следствия полученного решения системы цен равной рентабельности. **Графики 7-13** иллюстрируют разные аспекты этого решения.

1. В капиталистической экономике при произвольно заданной норме оплаты труда прибыль при нулевых затратах живого труда больше нуля. Если затраты живого труда на единицу продукции положительные, то зависимость прибыли от затрат живого труда в каждом подразделении имеет точку максимума, в которой прибыль в единице продукции достигает максимального значения. При дальнейшем увеличении затрат живого труда на единицу продукции прибыль быстро падает, обращаясь в ноль при некотором предельно допустимом значении затрат живого труда (**Графики 1 и 2**).
2. В капиталистической экономике при произвольно заданной реальной норме (ставке) оплаты труда (эта ставка должна быть меньше предельно возможной ставки $w_0 = \frac{1}{L_2}$), добавленная стоимость во всех подразделениях положительна даже при нулевых затратах живого труда на единицу продукции (**Графики 3 и 4**).
3. Для капиталистической экономики без эксплуатации труда работников - прибыли во всех подразделениях равны нулю при любых затратах живого труда. То есть выполняется фундаментальная теорема Маркса (**Графики 5 и 6**).
4. Рост реальной ставки оплаты труда влияет на цену продукции и на добавленную стоимость в деньгах (**Графики 7 – 9**).

Отметим Важные Выводы, вытекающие из этих Графиков:

A. положительные прибыли при капитализме возможны без применения наёмного живого труда в экономике и

B. положительная добавленная стоимость при капитализме возможна без применения наёмного живого труда в экономике.

Согласно формуле (21) если собственное число Фробениуса социо-технической матрицы меньше единицы, то норма рентабельности (а значит, а значит, и норма прибыли, и добавленные стоимости во всех секторах) будут больше нуля. Так как число Фробениуса меньше максимальной суммы элементов строк (или столбцов), то любые новшества, уменьшающие значения элементов социо-технической матрицы, будут уменьшать число Фробениуса[22], а значит повышать норму прибыли.

Так как любое уменьшение элементов этой матрицы означает экономию издержек производства, то можно сделать вывод, что **капиталистическая система как бы премирует приростом нормы прибыли капиталистов, которым удаётся достигать экономии на издержках производства. С этой точки зрения положительная прибыль при нулевых затратах живого труда достигается благодаря труду умного управления и организации производства со стороны капиталистов.**

Труд по управлению самих капиталистов - это не наёмный труд, и он не учитывается в третьей строке социо-технической матрицы, но труд капиталистов-предпринимателей – это тоже необходимый труд, который тоже создаёт добавленную стоимость, что и обнаруживается в нашей модели, когда мы определяем прибыль при нулевых затратах живого НАЁМНОГО труда. Наёмный труд в этом случае не используется, и говорить об эксплуатации наёмных рабочих нельзя, однако прибыль

[22] Вследствие теоремы о монотонности спектрального радиуса неотрицательной матрицы, который равен собственному числу Фробениуса (корню Перрона) этой матрицы. Теорема приведена в книге: Альпин Ю. А. (2015) Неотрицательные матрицы. Казань. Казанский федеральный университет. Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, стр. 35, Теорема 2.

остаётся положительной и связано это, вероятно, с трудом капиталистов по управлению предприятиями[23]. Технически происхождение добавленной стоимости при нулевых затратах наёмного живого труда можно связать с работой оборудования P, которая замещает труд наёмных работников (формула (18) в книге Покровский (2025)[24]).

Таким образом, обнаруженный математически факт существования положительной прибыли в экономике, не использующей живой наёмный труд рабочих, можно логически объяснить либо как результат труда самих капиталистов, либо как результат работы оборудования, которая замещает живой труд наёмных работников и может рассматриваться как один из факторов образования добавленной стоимости. Возможно, что оба объяснения верны и совместно влияют на величину прибыли в экономике, не использующей живой наёмный труд рабочих. Оба объяснения можно представить как аргументы против отождествления добавленной стоимости с трудом «в физиологическом смысле». В рамках данного направления экономической теории (ТТС) это означает, что нельзя отождествлять «абстрактный труд», количество которого определяет величину добавленной стоимости, с трудом «в физиологическом смысле».

Если же придерживаться стандартной версии ТТС, в которой только живой труд наёмных работников создаёт добавленную стоимость, то придётся признать, что алгоритм расчёта цен равной рентабельности вступает в противоречие с пониманием прибыли как денежного выражения части живого наёмного труда («в физиологическом смысле») рабочих, которую присваивают капиталисты без оплаты.

Мы видим, что есть и другая прибыль, не связанная с процессом эксплуатации наёмных рабочих, которая достигается благодаря принимаемым капиталистами мерам по экономии издержек производства (мерам, которые уменьшают число Фробениуса социо-технической матрицы и тем самым, повышают норму прибыли).

Увеличение нормы прибыли от управляющих воздействий, уменьшающих значения элементов социо-технической матрицы можно трактовать как процесс, связанный с управленческим трудом капиталистов и (или) как прямое следствие этого управления, замещением живого труда рабочих - работой оборудования, благодаря которому происходит экономия живого труда рабочих, снижение издержек по содержанию рабочих, снижение числа Фробениуса социо-технической матрицы и рост нормы прибыли.

Решения об установке такого оборудования, позволяющего снижать издержки по оплате наёмного труда и экономить живой труд, замещая его работой машин, - такие решения принимаются капиталистами в результате предварительного расчёта и прогноза, и это можно рассматривать как часть их работы. Поэтому, вероятно, прибыль без затрат живого наёмного труда может быть понята как результат работы капиталистов по установке замещающего труд оборудования и других мер экономии на издержках производства (экономия на сырье, энергоресурсах, транспортных расходах и т.д.).

Если же исходить из формальных постулатов стандартной версии ТТС, перечисленных во Введении, то, очевидно, имеются несоответствия между расчётными формулами, выведенными математически из решения системы уравнений цен равной рентабельности (13) – (15), и основными постулатами стандартной версии ТТС.

[23] Возможные объяснения ненулевых прибылей при нулевых затратах живого труда – смотри сноску 14 данной статьи.

[24] Покровский, В.Н. (2025). Мифы капитализма и математические законы общественного производства. Москва Июнь 2025.

ВЫВОДЫ:

Вывод первый – источником добавленной стоимости является не только живой труд наёмных работников, как принято считать в стандартной версии ТТС[25]. Иначе нельзя понять – как возможно, что добавленная стоимость может быть положительной, даже если живой труд вообще не используется.

Вывод второй – прибыль нельзя рассматривать как только лишь результат присвоения капиталистами части живого труда наёмных работников. Иначе нельзя понять – как возможно, что прибыль может быть положительна, даже если живой труд вообще не используется. Существует прибыль и без эксплуатации наёмных рабочих.

Вывод третий – между нормой рентабельности (прибыли) и нормой эксплуатации существует прямая зависимость, показанная на **Графике 13**. Это – чисто математическая зависимость. Соответствующие графики $r(e)$ при разных задаваемых значениях затрат живого труда $l_1;\ l_2$ проходят через точку $e=0;\ r=0$ причём $r(e)$ - знако-сохраняющая функция, значения которой больше нуля при положительных значениях параметрах эксплуатации и меньше нуля при отрицательных значениях параметра эксплуатации.

Существование такого графика показывает, что фундаментальная теорема Маркса (Утверждение 7) выполняется. В то же время **Графики 1-2** показывают, что прибыли положительны даже когда наёмный труд не применяется, то есть эксплуатации нет, так как некого эксплуатировать, а значит, Утверждение 8 не выполняется.

При заданном параметре эксплуатации норма рентабельности (прибыли) увеличивается с увеличением затрат живого труда, как видно из **Графика 13**, на котором пунктирная кривая, соответствующая положительным значениям затрат труда, проходит выше, чем сплошная кривая, соответствующая нулевым затратам живого труда. Мы опять видим, что при нулевых затратах труда норма рентабельности (норма прибыли) не обращается в ноль (сплошная кривая **Графика 13**). Она обращается в ноль только если параметр эксплуатации становится равным нулю, но при этом вне зависимости от величины затрат живого труда.

Но может быть причина этих несоответствий математических следствий вытекающих из математических решений системы уравнений (13) – (15) для цен равной рентабельности с фундаментальными утверждениями ТТС (перечисленными во Введении) – в том, что вместо уравнений для истинных цен производства мы использовали уравнения для цен равной рентабельности? Ведь при капитализме, строго говоря, равновесными являются именно цены производства, а не цены равной рентабельности.

Оказывается, что дело не в этом. Если мы вместо системы цен равной рентабельности рассмотрим систему цен производства (глава 5), то результат будет тот же

[25] У Маркса встречаются места, где он признаёт значимость труда капиталистов как менеджеров, однако, по Марксу, этот труд может выполнять и наёмный менеджер, а капиталисту остаётся лишь «труд» стричь купоны. Этот труд наёмного менеджмента в нашей модели уже включён в социо-техническую матрицу с обычной ставкой реальной оплаты труда менеджера. Но и после такого включения в социо-техническую матрицу затрат капиталистической системы – издержек по оплате труда по управлению и надзору наёмного персонала, выполняющего часть функций капиталистов,- остаётся всё же ещё дополнительная деятельность, которая принципиально не может быть выполнена никем на платной основе и оплата которой не входит в издержки производства. Это – деятельность выбора стратегии развития и целей бизнеса, принятия решений об установке нового оборудования, решений об экономии на средствах производства и наёмном персонале (замена живого труда работой оборудования). Именно эту стратегическую деятельность планирования и минимизации затрат, связанную с большой ответственностью и риском, капиталисты, как правило, оставляют себе, и именно эта деятельность в итоге приводит к системе мер по экономии издержек производства, которые вознаграждают капиталистов прибылью, даже если наёмный труд вообще не используется. Прибыль получается здесь не за счёт эксплуатации наёмного труда, а за счёт снижения издержек производства, вследствие правильного выбора управленческих решений по экономии издержек производства.

– прибыли (и добавленные стоимости) останутся положительными для случая нулевых затрат живого труда как в первом, так и втором подразделениях.

5. Система уравнений для цен производства.

Пусть авансированные капиталы состоят из запаса средств производства, предметов потребления и денежного капитала. Вводим обозначения:

X_k - физический запас (капитал) средств производства,

Y_k - - физический запас (капитал) предметов потребления,

b_k - запас денег (денежный капитал).

Индекс k принимает значения 0, 1, 2 для секторов производства денег, средств производства и предметов потребления соответственно.

Запишем цену авансированных капиталов.

$K_0 = b_0 + p_1 \cdot X_0 + p_2 \cdot Y_0$ - авансированный капитал в сфере производства денег,

$K_1 = b_1 + p_1 \cdot X_1 + p_2 \cdot Y_1$ - авансированный капитал в сфере производства средств производства,

$K_2 = b_2 + p_1 \cdot X_2 + p_2 \cdot Y_2$ - авансированный капитал в сфере производства предметов потребления.

Составляем систему уравнений для цен производства:

Уравнение для цены производства денежного металла:

$$\underbrace{d_0 + p_1 \cdot a_0 + p_2 \cdot w \cdot l_0}_{\text{ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДЧТВА}} + \underbrace{r \cdot \left(b_0 + p_1 \cdot X_0 + p_2 \cdot Y_0\right)}_{\text{ПРИБЫЛЬ}} = 1 \qquad (35)$$

Уравнение для цены производства средств производства:

$$\underbrace{d_1 + p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot w \cdot l_1}_{\text{ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДЧТВА}} + \underbrace{r \cdot \left(b_1 + p_1 \cdot X_1 + p_2 \cdot Y_1\right)}_{\text{ПРИБЫЛЬ}} = p_1 \qquad (36)$$

Уравнение для цены производства предметов потребления:

$$\underbrace{d_2 + p_1 \cdot a_2 + p_2 \cdot w \cdot l_2}_{\text{ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДЧТВА}} + \underbrace{r \cdot \left(b_2 + p_1 \cdot X_2 + p_2 \cdot Y_2\right)}_{\text{ПРИБЫЛЬ}} = p_2 \qquad (37)$$

Нетрудно проверить, что эта система имеет положительное решение и для случая экономики, в которой живой труд в подразделениях 1 и 2 не применяется $l_1 = l_2 = 0$ [26].

Например, пусть параметры этой системы уравнений имеют следующие значения:

$$a_0 = 0.1;\ a_1 = 0.4;\ a_2 = 0.5;\ l_0 = 0.1;\ l_1 = l_2 = 0;\ d_0 = 0.2;\ d_1 = 0.02;\ d_2 = 0.06;$$
$$b_0 = 0.2;\ b_1 = 2;\ b_2 = 5;\ w = 0.1;\ X_0 = 10;\ X_1 = 20;\ X_2 = 12;\ Y_0 = 20;\ Y_1 = 10;\ Y_2 = 15 \qquad (38)$$

Решение системы при этих параметрах:

$$r = 0.017591381065590623;$$
$$p_1 = 1.1572015576857237 \qquad (39)$$
$$p_2 = 1.3188430186141915$$

Прибыли трёх индустрий равны:

$$\pi_0 = r \cdot \left(b_0 + p_1 \cdot X_0 + p_2 \cdot Y_0\right) = 0.6710914140452856$$
$$\pi_1 = r \cdot \left(b_1 + p_1 \cdot X_1 + p_2 \cdot Y_1\right) = 0.6743209346114343 \qquad (40)$$
$$\pi_2 = r \cdot \left(b_2 + p_1 \cdot X_2 + p_2 \cdot Y_2\right) = 0.6802422397713296$$

Таким образом, и при решении системы уравнений для цен производства прибыли могут быть больше нуля, даже если живой труд не используется в производстве. То есть основные результаты, полученные при решении системы уравнений для цен равной

[26] Положительное решение – положительные цены, норма прибыли и прибыли существует и в случае экономики, все сектора которой (включая производство денег) не используют наёмный живой труд рабочих.

рентабельности, остаются качественно те же[27]. Но если систему уравнений (13) – (15) не трудно решить в общем символическом виде, систему уравнений для цен производства (35) – (37) решить намного сложнее в общем символическом виде[28]. Поэтому мы ограничимся лишь числовым решением этой системы.

В **Приложении 1** собраны **Графики 25 - 43**, построенные по результатам численных расчётов для прибылей, добавленных стоимостей, цен и нормы прибыли в зависимости от затрат живого труда в первом и втором подразделениях. Результат качественно такой же, как и для случая решения системы уравнений цен равной рентабельности. Прибыли и добавленные стоимости могут быть положительными при нулевых затратах живого труда на производство продукции в первом и втором подразделениях (**Графики 25 – 39**).

Для цен производства (как и для цен равной рентабельности) опять выполняется фундаментальная теорема Маркса – если параметр эксплуатации, рассчитанный по докапиталистической стоимости предметов потребления, равен нулю, то прибыль также равна нулю во всех трёх секторах (**Графики 40 - 43**).

Отметим, что обе системы цен – система цен равной рентабельности (13)-(15) и система цен производства (35)-(37) сводятся при нулевой норме рентабельности (или норме прибыли) к одной и той же системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(d_0 + p_1 \cdot a_0 + p_2 \cdot w \cdot l_0\right) = p_0 = 1 & (41) \\ \left(d_1 + p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot w \cdot l_1\right) = p_1 & (42) \\ \left(d_2 + p_1 \cdot a_2 + p_2 \cdot w \cdot l_2\right) = p_2 & (43) \end{cases}$$

Эта система решается в общем виде (Program-5). Получаем следующее решение:

$$p_1 = \frac{d_1 l_0 + l_1\left(1 - d_0\right)}{l_0\left(1 - a_1\right) + a_0 l_1}; \qquad (44)$$

$$p_2 = \frac{d_2\left(l_0\left(1 - a_1\right) + a_0 l_1\right) + a_2\left(d_1 l_0 + l_1\left(1 - d_0\right)\right) + \left((1 - a_1)(1 - d_0) - a_0 d_1\right) l_2}{l_0\left(1 - a_1\right) + a_0 l_1} \qquad (45)$$

$$w = \frac{\left(1 - a1\right)\left(1 - d_0\right) - a_0 d_1}{(1 - a_1) d_2 l_0 + a_0 d_2 l_1 + a_2\left(d_1 l_0 + l_1\left(1 - d_0\right)\right) + \left(\left(1 - a_1\right)\left(1 - d_0\right) - a_0 d_1\right) l_2} \qquad (46)$$

Но легко проверить, что норма оплаты труда (46), полученная для нулевой нормы прибыли, тождественно совпадает с нормой оплаты труда (27). Отсюда следует фундаментальная теорема Маркса (теорема Окишио) о математической эквивалентности утверждений**: норма прибыли (а значит и величины прибылей) равны нулю тогда и только тогда, когда норма эксплуатации равна нулю.**

Таким образом, условие $r = 0$ **математически эквивалентно условию** $e = 0$**.**

Надо, однако, иметь в виду, что условие $e = 0$ эквивалентно равенству (27), которое содержит стоимость единицы набора предметов потребления, определяемую по алгоритму расчёта стоимости, который определён для докапиталистической экономики. Но в докапиталистической экономике капиталистическая эксплуатация отсутствует и, вообще говоря, не ясно, допустимо ли вообще применять величины, найденные для одного вида рыночной экономики, внутри другого вида рыночной экономики. Поэтому «показатель эксплуатации», составленный с помощью докапиталистической стоимости предметов потребления – может давать ошибочное понимание о фактической эксплуатации при капитализме. Чтобы показатель эксплуатации показывал фактическую

[27] В главе 12 доказывается, что цены равной рентабельности и цены производства почти одинаковы при малых нормах прибыли.

[28] Для решения в общем виде уравнений (35) – (37) программа Mathematica 10.4 требует более значительных аппаратных возможностей от компьютера, чем тот компьютер, на котором проводились вычисления.

эксплуатацию, необходимо вместо докапиталистической стоимости (34) единицы предметов потребления подставить в формулу (27) капиталистическую стоимость предметов потребления, которая находится после учёта влияния на стоимости товаров социальной формы общественного труда, которая при капитализме глубоко отлична от формы общественного труда в докапиталистической рыночной экономике.

Математическую эквивалентность между равенством нулю нормы прибыли и равенством нулю параметра $e = 0$ поэтому следует трактовать именно как математическую эквивалентность двух формул, но не как логическую эквивалентность между отсутствием эксплуатации и нулевой нормой прибыли. Факт обнуления параметра e возможно вовсе не означает отсутствия эксплуатации при капитализме, так как для определения истинного параметра эксплуатации следовало бы в формуле (27) использовать капиталистическую стоимость предметов потребления, помня, что эта стоимость отличается от докапиталистической стоимости, даже если товары произведены при одинаковых технических способах производства. Технические способы могут быть одинаковыми, а социальные способы производства могут отличаться - и это будет сказываться на величинах стоимостей товаров, произведённых в разных социальных системах[29].

Поэтому вычисляемый с помощью докапиталистической стоимости параметр e может давать неверное представление об уровне эксплуатации, а математическая эквивалентность $r = 0 \Leftrightarrow e = 0$ вовсе не обязательно означает логическую эквивалентность между нормой прибыли и реальным уровнем эксплуатации.

[29] Последнее утверждение составляет одну из аксиом новой версии ТТС.

6. Отбор собственного значения Фробениуса из списка собственных значений в программе Mathematica.

Собственные значения символической социо-технической матрицы (16) являются корнями характеристического кубического уравнения:

$$f\left(x\right)=K_0+K_1x+K_2x^2+K_3x^3=0 \tag{47}$$

Коэффициенты $K_{0;1;2;3}$ - вещественные числа. Уравнение третьей степени имеет всегда три корня. Есть несколько случаев: (1) все три корня вещественные и различные, (2) два корня вещественные и равны, третий корень тоже вещественный и отличается от первых двух, (3) все три корня вещественные и равны. В этих трёх случаях программа Mathematica выводит эти корни в порядке их роста и третий вещественный корень будет собственным числом Фробениуса. Далее возможны случаи, когда есть комплексные корни и таких корней может быть только два – два комплексно-сопряжённых корня, так как коэффициенты $K_{0;1;2;3}$ - вещественные числа. Тогда имеется лишь один вещественный корень, который и будет числом Фробениуса, так как по теореме Фробениуса-Перрона существует максимальное по модулю собственное значение матрицы с неотрицательными элементами, которое во-первых, является вещественным числом и, во-вторых, этому собственному значению соответствует положительный собственный вектор.

Mathematica 10.8, в которой были выполнены расчёты для этой статьи, определяет корни уравнений с помощью функции Root[f,n] по собственным правилам, нумеруя индексом n корни этого уравнения по возрастанию корня, если эти корни вещественные и располагая комплексные корни в порядке роста их вещественной и мнимой части причём так, чтобы комплексно сопряжённые корни были смежными . Причём порядок расположения корней может быть разный и зависеть от того, какого типа корень, целое или вещественное число.

В Приложении 2 приведена Program 5, в которой показано, как меняется нумерация корней в разных случаях. Коэффициенты $K_{0;1;2;3}$ вычисляются по следующим формулам:

$$K_0=w\cdot\left(-a_2d_1l_0+a_1d_2l_0+a_2d_0l_1-a_0d_2l_1-a_1d_0l_2+a_0d_1l_2\right) \tag{48}$$

$$K_1=a_1d_0-a_0d_1-d_2l_0w-a_2l_1w+a_1l_2w+d_0l_2w \tag{49}$$

$$K_2=-a_1-d_0-l_2w \tag{50}$$

$$K_3=1 \tag{51}$$

Собственное значение Фробениуса равно максимальному вещественному корню уравнения (47) (характеристического уравнения матрицы (16)) и равно:

$$\text{Root}[-\text{a2d1l0}w+\text{a1d2l0}w+\text{a2d0l1}w-\text{a0d2l1}w-\text{a1d0l2}w+\text{a0d1l2}w+(\text{a1d0}-\text{a0d1}-\text{d2l0}w-\text{a2l1}w+\text{a1l2}w+\text{d0l2}w)\#1+(-\text{a1}-\text{d0}-\text{l2}w)\#1^2+\#1^3\&,3]$$

В данной формуле взят третий корень. И подстановка числовых значений показывает, что это значение корня (третий корень в нумерации программы) вещественное и максимальное. Однако это верно лишь до тех пор, пока все три корня вещественные. В зависимости от параметров кубического уравнения, то есть, в зависимости от значений коэффициентов $K_{0;1;2;3}$ возможны ситуации, когда два (из трёх) вещественных корней сливаются в один корень и далее при том же изменений параметров уравнения становятся комплексно сопряжёнными и остаётся таким образом только один

вещественный корень, который программа Mathematica нумерует уже не как третий (последний из трёх вещественных) а как первый (единственный вещественный) корень. Эта перенумерация, возникающая вследствие изменения типа корня, графически отображается как обрыв графика третьего корня и замена его графиком первого корня. Графики корней в зависимости от параметра l_1 приведены ниже:

График 14. Зависимость первого корня кубического уравнения (нумерация программы Mathematica) от параметра l_1.

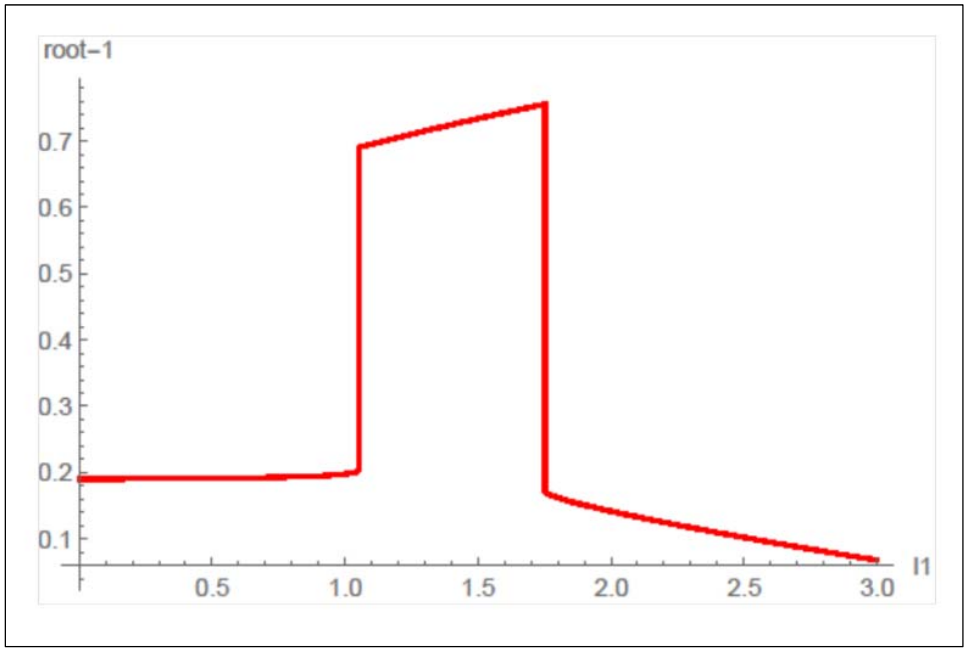


График 15. Зависимость второго корня кубического уравнения (нумерация программы Mathematica) от параметра l_1.

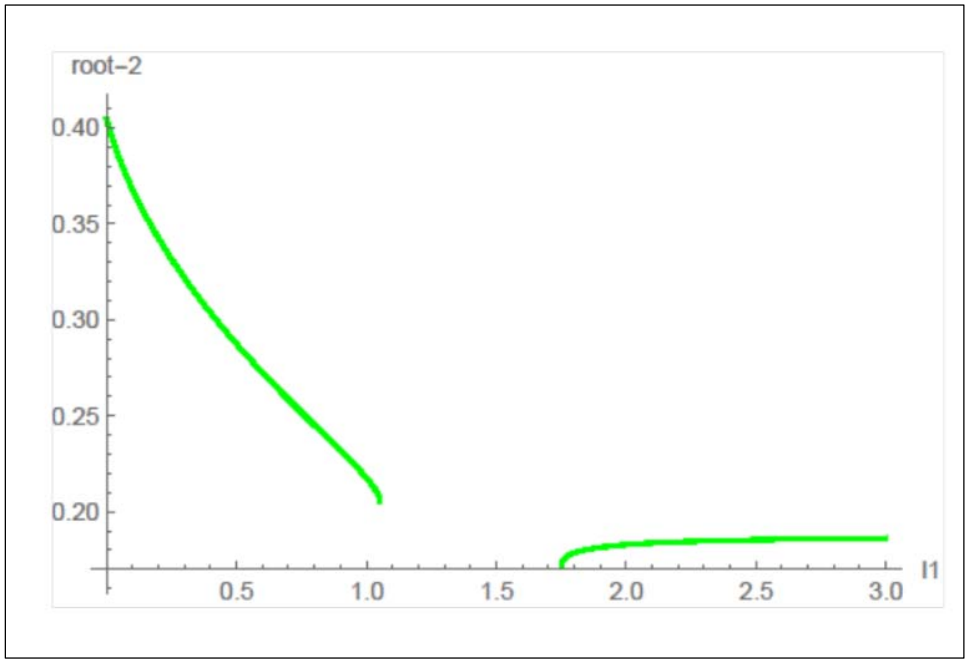


График 16. Зависимость третьего корня кубического уравнения (нумерация программы Mathematica) от параметра l_1.

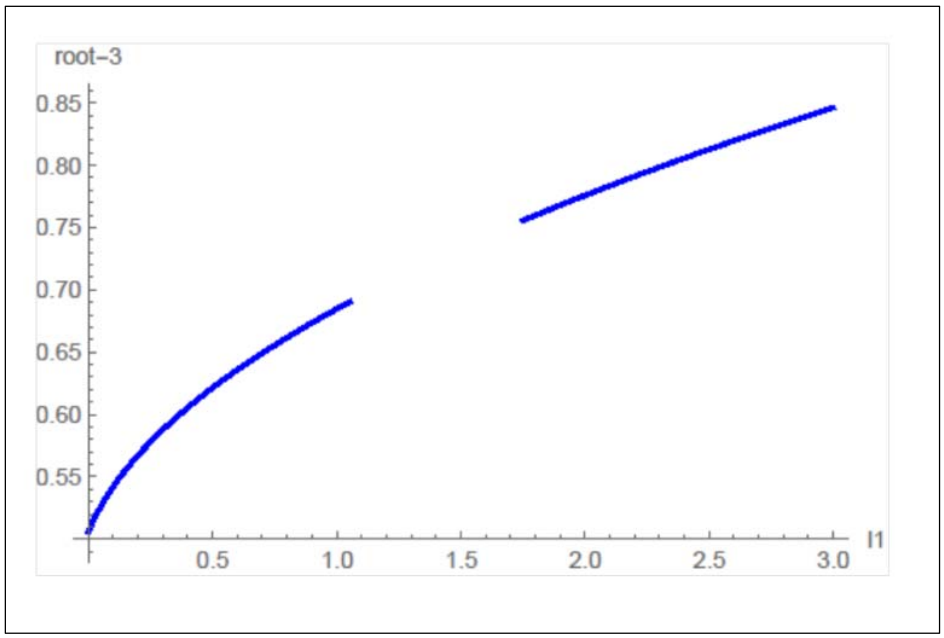
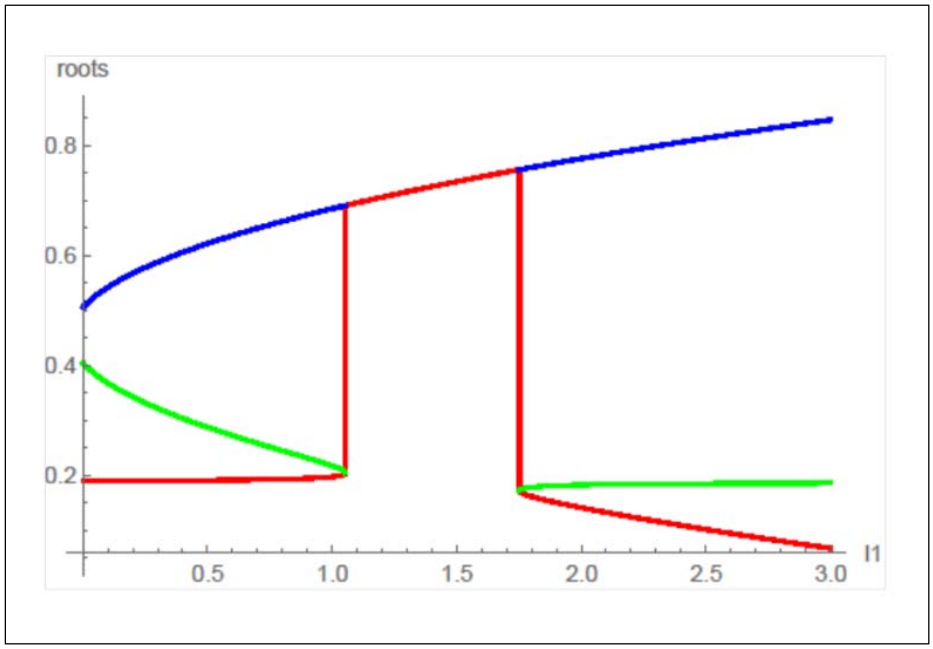


График 17. Зависимость корней кубического уравнения (нумерация программы Mathematica) от параметра l_1. Красный – первый корень, зелёный – второй корень, синий – третий корень.



7. Стоимостные цены.

Поскольку стандартная версия ТТС отождествляет «абстрактный труд» с «трудом в физиологическом смысле», она называет стоимостью товара то, что в новой версии ТТС мы называем «стоимостью-1». Соответственно СВ рассматривает цены обмена по стоимости-1 в качестве цен обмена по стоимости. В этой главе мы принимаем терминологию СВ и называем «стоимостными ценами» - цены обмена товаров по стоимости-1[30].

В Приложении 2 приведена Program-8, которая доказывает на числовом примере что цены обмены по стоимости равны ценам равной рентабельности и равны ценам производства, если параметр эксплуатации равен нулю, а ставка реальной оплаты труда определяется вытекающей из этого условия формулой (27) или (46).

Ниже приведены Графики зависимости отношения цены равной рентабельности к стоимостной цене, которая на Графиках и в программе обозначена буквой q. Хорошо видно, что это отношение равно единице при некотором значении реальной ставки оплаты труда. Program-8 доказывает на числовом примере, что это та ставка при которой стоимостная цена совпадает с ценой равной рентабельности, это именно ставка реальной оплаты труда, при которой параметр эксплуатации обращается в ноль.

Доказательство в общем виде требует больших аппаратных возможностей компьютера. Однако, меняя числовые значения параметров, не трудно убедиться, что во всех случаях именно при ставке оплаты труда (27) цена равной рентабельности будет совпадать с стоимостной ценой. Так как при этом условии (смотри предыдущую главу) цена равной рентабельности совпадает с ценой производства, мы приходим к выводу, что условие отсутствия эксплуатации обеспечивает совпадение всех трёх видов цен.

Если бы мы решали проблему трансформации, которая существует в стандартной версии, то полученный результат можно было бы использовать как одну из возможностей для решения, однако поскольку в этом случае эксплуатация отсутствует, то такое решение было бы тривиальным. Не для того создавалась теория Маркса, чтобы её последователи согласились бы на решение проблемы трансформирования, основанном на признании отсутствия эксплуатации при капитализме[31].

---

[30] В новой версии ТТС разным типам рыночной экономики соответствуют разные определения стоимостей. Хотя во всех случаях стоимость – это абстрактный овеществлённый в товаре труд, однако на разных стадиях развития рыночной экономики абстрактный труд определяется и рассчитывается по-разному. Новая версия ТТС различает три стадии рыночной экономики:
(1) экономика квазинатуральная, в которой производители, объединённые в одну хозяйственную ячейку (поместье, родовая община, крестьянское хозяйство), производят почти всё им необходимое сами, обмениваясь лишь излишками с другими товарными хозяйствами. Эта экономика существовала до начала 16 века. Обмен по стоимости-1.
(2) Рыночная экономика с высоким уровнем разделения труда, ориентированная на производство товаров, но без широкого применения наёмного труда. Эта экономика (докапиталистическая) существовала в Европе до середины 18 века. Обмен по стоимости-2.
(3) Рыночная экономика с широким применением наёмного труда в промышленности. Начинается с середины 18 века. Обмен по стоимости-3.

[31] В новой версии ТТС параметр эксплуатации определяется через стоимость-3 предметов потребления и там доказывается, что условие отсутствия эксплуатации совместимо с положительностью прибылей и нормы прибыли.

График 18. Отношение цены равной рентабельности к стоимостной цене единицы средств производства как функция реальной оплаты труда.

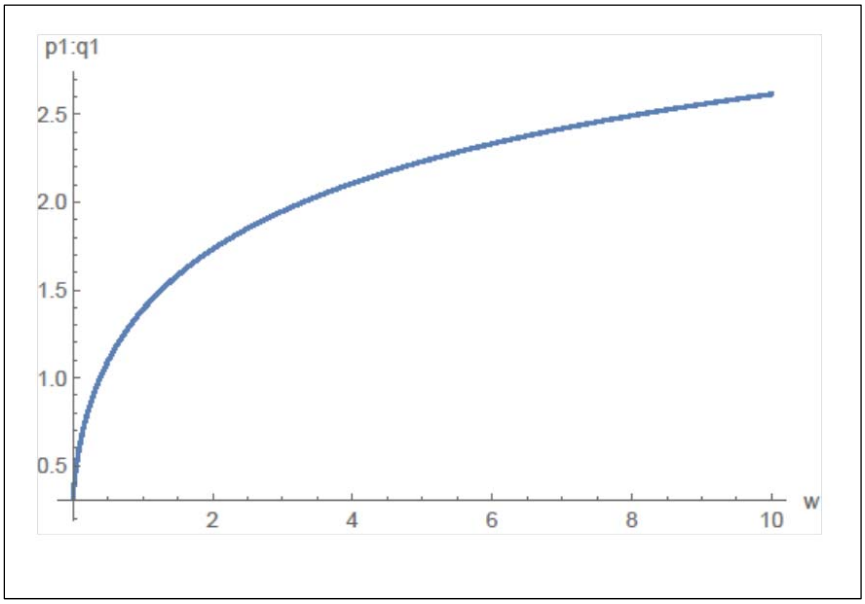
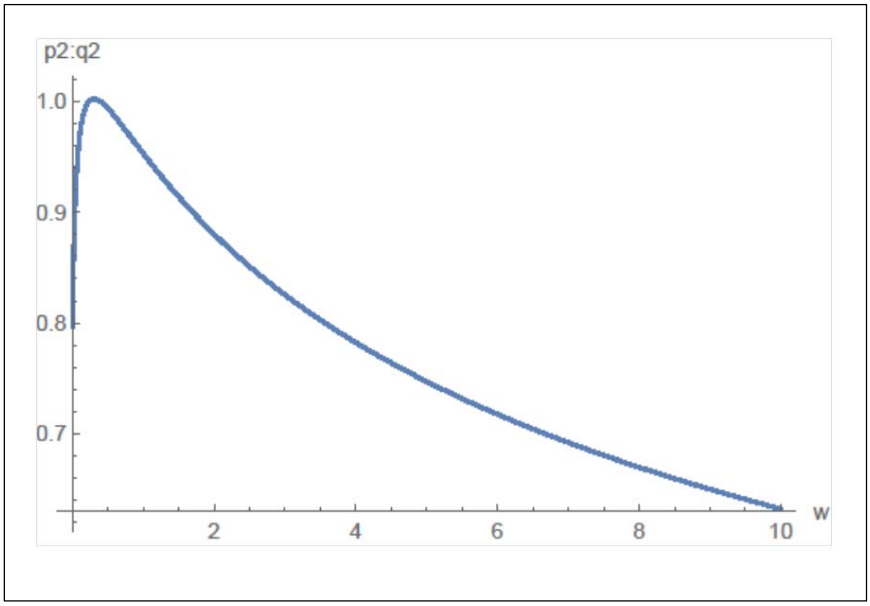


График 19. Отношение цены равной рентабельности к стоимостной цене единицы средств производства как функция реальной оплаты труда.



8. Доказательство равенства стоимостных цен и цен равной рентабельности при условии отсутствия эксплуатации.

При отсутствии эксплуатации, так как для цен равной рентабельности выполняется фундаментальная теорема Маркса (это доказывается в общем виде в Приложении 2 Program-1), прибыли, а значит, и норма прибыли будут равны нулю, и система уравнений цен равной рентабельности сводится к виду:

$$\begin{cases} d_0 + a_0 p_1 + w \cdot l_0 \cdot p_2 = 1 \\ d_1 + a_1 p_1 + w \cdot l_1 \cdot p_2 = p_1 \\ d_2 + a_2 p_1 + w \cdot l_2 \cdot p_2 = p_2 \end{cases} \quad (52)$$

Эта система трёх уравнений для трёх неизвестных $(p_1; p_2; r)$ имеет единственное решение.

Докажем, что стоимостные цены при условии отсутствия эксплуатации удовлетворяют системе уравнений (52). Обозначим стоимостные цены как $q_1; q_2$ а стоимости обозначим как $L_0; L_1; L_2$.

Стоимости товаров удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} d_0 L_0 + a_0 L_1 + l_0 = L_0 \\ d_1 L_0 + a_1 L_1 + l_1 = L_1 \\ d_2 L_0 + a_2 L_1 + l_2 = L_2 \end{cases} \quad (53)$$

Стоимостные цены равны:

$$q_1 = \frac{L_1}{L_0}; \qquad q_2 = \frac{L_2}{L_0} \quad (54)$$

Разделим все три уравнения системы (53) на L_0 и перепишем систему (53) в стоимостных ценах:

$$\begin{cases} d_0 + a_0 q_1 + \dfrac{l_0}{L_0} = 1 \\ d_1 + a_1 q_1 + \dfrac{l_1}{L_0} = q_1 \\ d_2 + a_2 q_1 + \dfrac{l_2}{L_0} = q_2 \end{cases} \quad (55)$$

Учтём условие отсутствия эксплуатации:

$$w \cdot L_2 = 1 \quad (10)$$

Из равенства (10) следуют тождества:

$$\frac{l_k}{L_0} = w \cdot L_2 \cdot \frac{l_k}{L_0} = w \cdot q_2 \cdot l_k; \qquad k = 0;1;2 \quad (56)$$

И система для стоимостных цен (54), получающаяся из системы (55) с учётом тождеств (56) совпадает с системой (52).

$$\begin{cases} d_0 + a_0 \cdot q_1 + w \cdot l_0 \cdot q_2 = 1 \\ d_1 + a_1 \cdot q_1 + w \cdot l_1 \cdot q_2 = q_1 \\ d_2 + a_2 \cdot q_1 + w \cdot l_2 \cdot q_2 = q_2 \end{cases} \quad (57)$$

Доказательство завершено.

9. Дискуссия Маркса и Уэстона о влиянии оплаты труда на цены.

Итак, мы видим, что стандартная версия ТТС рассматривает три системы цен: (1) цены обмена по стоимости (стоимости-1), которые действуют в докапиталистической экономики, (2) цены равной рентабельности и (3) цены производства (регулируют обмен в капиталистической экономике). Разные системы цен – значит и разные законы, которыми определяется влияние тех или иных факторов на добавленную стоимость и цены. Теория имеет ценность, если её можно применять на практике, и она даёт верные ответы.

Мы обратимся к одному историческому случаю, когда Маркс попытался применить теорию цен для объяснения их изменения, вследствие изменений в оплате труда. Это – известный диспут, который состоялся на встрече Интернационала 20 мая 1865 года. С одной стороны выступал последователь Оуэна плотник-самоучка Уэстон, с другой стороны учёный, знаток политэкономии, Маркс. Это был период, когда Маркс активно работал над «Капиталом» и изучал политэкономию, явно симпатизируя Давиду Рикардо, теория трудовой стоимости которого была взята Марксом за основу и развита в первом томе его сочинения. Как ясно из чтения первого тома «Капитала» Маркс на этом этапе своего научного исследования рассматривает стоимостные цены. А стоимостные цены не могут зависеть от ставки оплаты труда, так сами стоимости (стоимости-1 или затраты труда в физиологическом смысле, овеществлённые в товаре) не зависят от ставки оплаты труда. Формулы для стоимостей-1 приведены в Program-1 Приложения-2. Это – формулы (32)-(34), которые вообще не содержат параметра w - реальной савки оплаты труда.

Поэтому и стоимостные цены не будут зависеть от ставки оплаты труда. Но цены равной рентабельности и цены производства будут зависеть от ставки оплаты труда, так как в их формулы входит параметр w. И вот состоялся этот диспут, в котором Маркс доказывал, что изменеие уровня оплаты труда не повлияет в конечном итоге на цены, а Уэстон, ссылаясь на данные о ценах и мнение Адама Смита, считал, что такое влияние есть. Два авторитетных мыслителя спорили о РАЗНЫХ системах цен, хотя говорили именно о ценах своего времени, то есть капиталистических ценах.

В письме Энгельсу от 20 мая 1865 года Маркс пишет:

«Сегодня вечером экстренное заседание Интернационала. Один славный чудак, старый оуэнист Уэстон (плотник) выставил два положения, которые он постоянно защищает в "Bee-Hive":

1) *Что общее повышение уровня заработной платы не может принести рабочим никакой пользы;*
2) *Что вследствие этого и пр. тред-юнионы приносят вред….*

Разумеется, от меня ждут опровержения этих взглядов…

Я, разумеется, знаю заранее, к чему сводятся оба основных пункта:

1) *Что стоимость товаров определяется заработной платой;*
2) *Что если капиталисты сегодня платят 5 шилл., вместо 4, то они будут завтра (возросший спрос даст им эту возможность) продавать свои товары за 5 шилл., вместо 4.*

Хотя всё это плоско и затрагивает только поверхность явлений, однако не легко разъяснить людям несведущим все связанные с этим экономические вопросы. Невозможно изложить курс политической экономии в течение одного часа. Но постараюсь сделать всё, что в моих силах»

Доклад, в котором Маркс «опровергает» тезисы Уэстона, был опубликован отдельной брошюрой в 1898 году под названием «Заработная плата, цена и прибыль». В ней Маркс пытается доказывать неочевидную и не подтверждаемую статистикой закономерность – будто общий рост оплаты труда никак не влияет на рост равновесных цен. Рассмотрим основные аргументы Маркса по этому вопросу. Маркс пишет:

«Если нам дано определённое число, скажем 8, то абсолютные границы этого числа не мешают его частям изменять свои относительные границы. Если прибыль равна 6, а заработная плата 2, то заработная плата может возрасти до 6, а прибыль упасть до 2, и всё же общая сумма останется равной 8» (К. Маркс «Заработная плата, цена и прибыль». В книге К. Маркс, Ф. Энгельс «Избранные произведения в двух томах», том. 1, ОГИЗ, Институт Иаркса-Энгельса-Ленина, Москва 1948).

С самого начала Маркс исходит из предположения, что сумма зарплаты и прибыли (то есть, добавленная стоимость) есть величина фиксированная, если брать состояние равновесия в экономике с фиксированными технологиями производства. В данном примере эта сумма равна 8 и изменение её составных частей не может повлиять на саму величину этой суммы. Ранее на примере простой модели цен равной рентабельности (модель цен производства) мы показали, что это предположение, из которого исходит Маркс, ошибочно. Уэстон говорит о капиталистических ценах, на которые влияет уровень оплаты труда и этот факт подтверждается статистикой.

В качестве примера приведём индексы роста дневной оплаты труда и цен на основные жизненные средства в Англии за период 1700 – 1825 годы[32]. Выбранный период соответствует стадии формирования промышленного капитализма в Англии.

Ниже приведены Графики зависимости индекса цен на разные группы товаров и индексы подённой оплаты труда. Расчёт выполнен на основе данных, взятых из исторической базы данных GBIH: “England prices and wages since 13th (Clark)” (от 10 декабря 2013). Использованы цены, выраженные в граммах серебра, что с самого начала исключает фактор инфляции. Мы составили три индекса цен на жизненные средства и индекс цен на уголь, являвшийся в то время одним из основных средств производства. Жизненные средства условно поделены на две группы: основные жизненные средства (продукты питания) и неосновные жизненные средства. Для расчёта индекса оплаты труда взяты данные о подённой оплате в сельском хозяйстве (farm wage) и в городе (craft wage). По индексам для двух групп жизненных средств был рассчитан средний индекс потребительских цен как средняя величина. Аналогично по двум индексам подённой оплаты в деревне и городе был рассчитан индекс оплаты труда как средняя величина.

График 19 для индексов оплаты труда ремесленников (“craft wage”), крестьян (“farm wage”) и строительных рабочих (“building wage”) показывает, что вековая динамика подённой зарплаты для всех трёх категорий работников почти идентична.

[32]Данные (в граммах серебра) были собраны Грегори Кларком и содержатся в базе данных GBIH: “England prices and wages since 13th (Clark)” (от 10 декабря 2013): http://gpih.ucdavis.edu/Datafilelist.htm

График 20 показывает индекс основных (продукты питания) и неосновных (другие товары потребления) жизненных средств. К основным жизненным средствам отнесены следующие продукты: ячмень, бобы, говядина, бифстроган, сыр, яйца, мука, хмель, молоко, баранина, овсянка, горох, перец, свинина, рис, рожь, соль, почечное сало, сахар, уксус, портвейн, пшеница, пшеничная мука. К неосновным жизненным средствам относятся следующие продукты: свечи, уголь, одежда, дрова, сено, расходы проживания, льняная ткань, гвозди, овёс, ламповое масло, бумага, оловянная посуда, обувь, шелковая нить, мыло, чулки, солома, древесина, шерсть, шерстяная ткань.

График 19. Подённая зарплата в Англии.

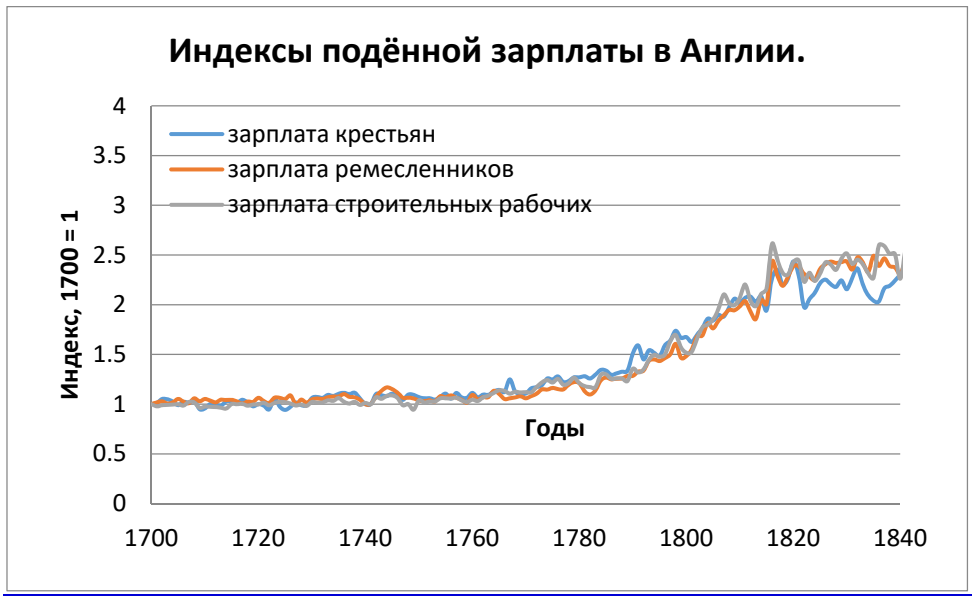
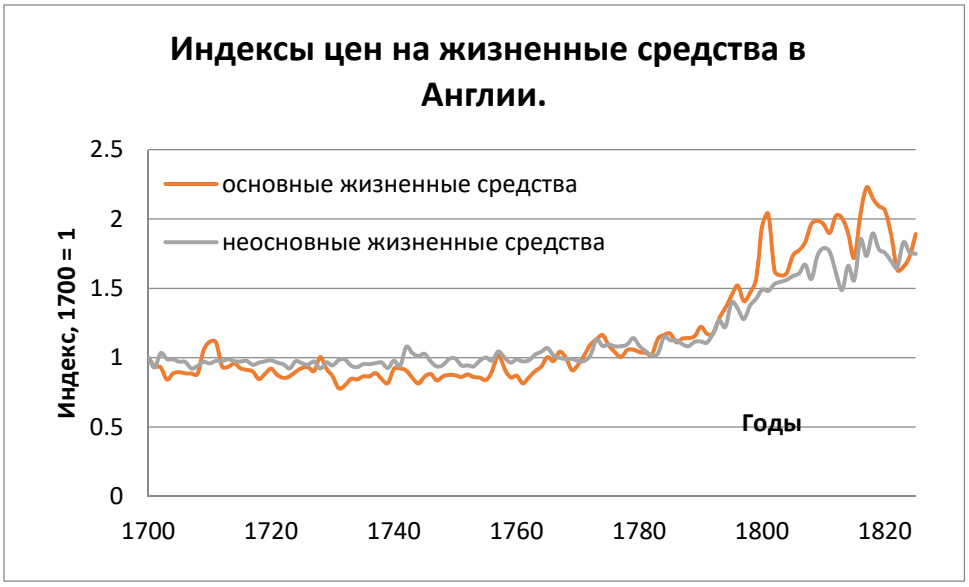


График 20. Индексы цен на основные и неосновные жизненные средства в Англии.



Что же мы видим из этих Графиков? Очевидна корреляция между индексом цен и индексом подённой оплаты труда. Говорить, что рост оплаты труда является причиной роста цен, конечно, нельзя. Но и утверждать, что рост зарплаты никак не связан с ростом цен – это значит противоречить тому, что ты видишь.

За один и тот же период зарплата (все данные были взяты в граммах серебра) увеличилась примерно в 2.2. раза, а цены выросла примерно вдвое. Эта связь между уровнем зарплаты и ценами была замечена экономистами задолго до Маркса.

В 1776 году Адам Смит публикует своё фундаментальное «Исследование о природе и причинах богатства народов», в котором высказывает предположение, что между ценами и зарплатой должна существовать прямая зависимость и рост одной из них должен сопровождаться ростом другой величины. Адам Смит отмечает как факт, не подлежащий никакому сомнению:

«Рост заработной платы необходимо ведет к возрастанию цены многих товаров, поскольку увеличивает ту часть ее, которая приходится на заработную плату» (А. Смит «Исследование о природе и причинах богатства народов» (гл. VIII)).

Капиталистическая экономика – это система, анализ поведения которой требует применения математических методов, отражающих всю совокупность взаимосвязей в ней. Маркс мог использовать лишь силу своей гениальной логики, которая не всегда давала верные ответы. Логика оперирует с нечётко очерченными понятиями и уже по этой причине её выводы не всегда могут дать верный ответ там, где необходимы точные расчёты и количественные сопоставления.

В данном случае Маркс заблуждался, полагая, что рост зарплаты не сказывается на уровне цен. Маркс в своих возражениях Уэстону рассматривает стоимостные цены, тогда как Уэстон отстаивает закономерность, которая выполняется для капиталистических цен. Просто они спорили о разных системах цен. Уэстон о ценах того общества в котором он жил, Маркс, видимо, оставаясь под влиянием исследований Рикардо, оппонировал ему, используя закономерности, верные только для стоимостных цен, которые отличаются от капиталистических цен[33].

Ниже приведены Графики 69 - 72 зависимости цен от реальной оплаты труда $w \cdot l_k$ и от денежной оплаты труда $p_2 \cdot w \cdot l_k$ для системы цен равной рентабельности. Эти Графики наглядно демонстрируют, кто был прав в том давнем споре между скромным плотником-самоучкой и эрудированным доктором философии. Получилось по известному афоризму Гераклита: *«Многознание уму не научает»* (по-гречески звучит как πολλὴ μάθησις νόον οὐ διδάσκει (*pollē mathēsis noōn ou didaskei*).

Program-9 Приложения 2 содержит код расчёта и графики для цен, прибылей, добавленных стоимостей на единицу товара для цен равной рентабельности в зависимости от реальной и денежной оплаты труда. Использованы те же значения параметров, что и в предыдущих расчётах. Для затрат живого труда на единицу товара были взяты значения

$l_0 = 0.1;\ l_1 = l_2 = 1$.

[33] Хотя очевидно, что в этом диспуте прав был Уэстон, Маркс, благодаря своей эрудиции и логике, умел создавать впечатление, что во всех спорах прав именно он. Если оппонент соглашался, его прощали. Если упорствовал, его психологически уни(что)жали. На этот раз к концу диспута Маркс резюмирует итог так: *«Мысли доклада, прочитанного нам гражданином Уэстоном, могли бы уместиться в ореховой скорлупе»* (*К. Маркс «Заработная плата, цена и прибыль». В книге К. Маркс, Ф. Энгельс «Избранные произведения в двух томах», том. 1, ОГИЗ, Институт Иаркса-Энгельса-Ленина, Москва 1948,* стр. 359).

График 21. Цена равной рентабельности для единицы средств производства в зависимости от реальной оплаты труда в единице этого товара.

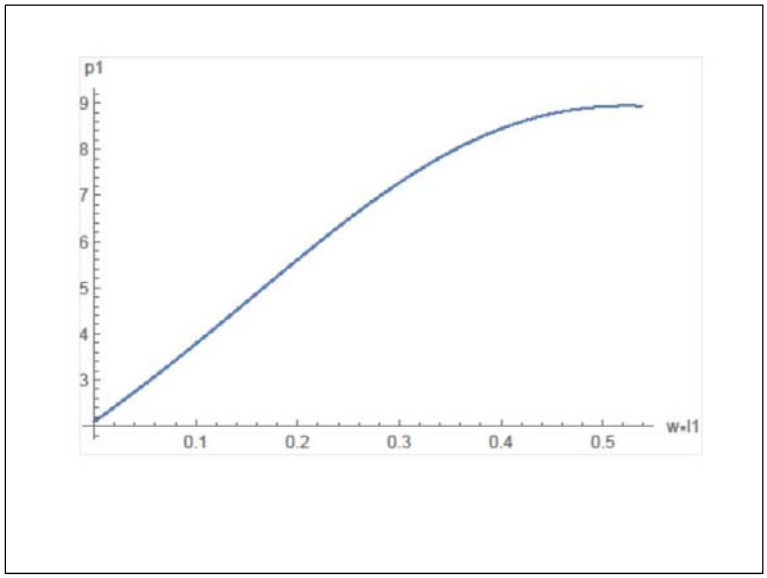


График 22. Цена равной рентабельности для единицы предметов потребления в зависимости от реальной оплаты труда в единице этого товара.

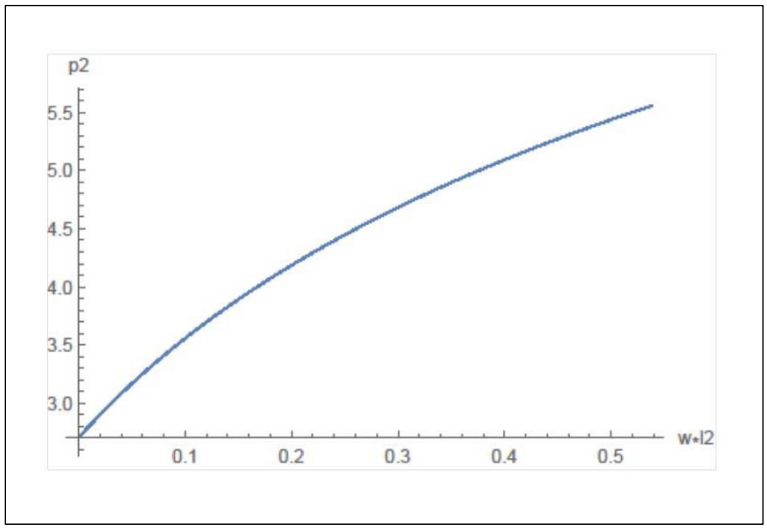


График 23. Цена равной рентабельности для единицы средств производства в зависимости от денежной оплаты труда в единице этого товара.

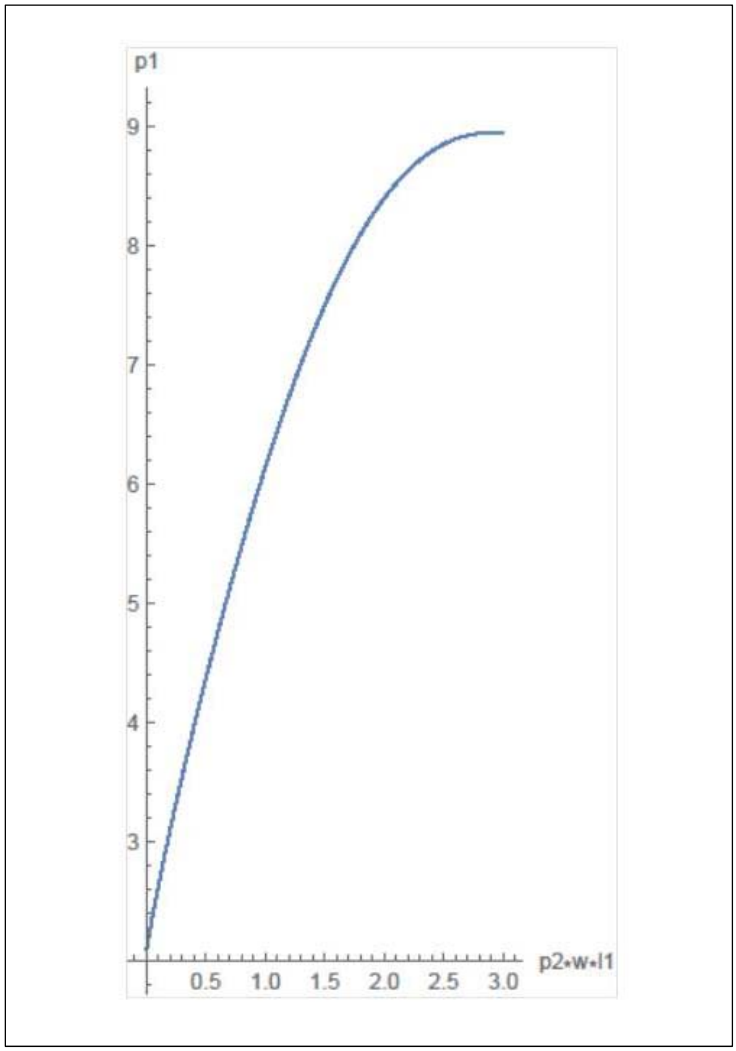
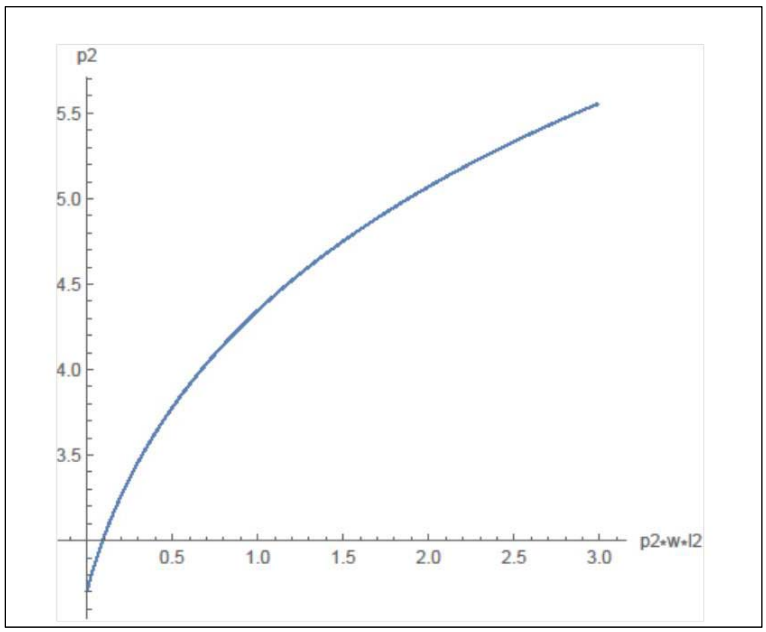


График 24. Цена равной рентабельности для единицы предметов потребления в зависимости от денежной оплаты труда в единице этого товара.



11. О фундаментальной теореме Маркса (теореме Окишио).

Фундаментальная теорема Маркса (доказанная японским экономистом Окишио, (Okishio's theorem (1961)) утверждает, что (1) норма прибыли больше нуля тогда и только тогда, когда параметр эксплуатации больше нуля и (2) норма прибыли равна нулю тогда и только тогда, когда параметр эксплуатации равен нулю (эксплуатация отсутствует). Математически, эти утверждения можно записать как эквивалентность двух неравенств и двух равенств:

$$r \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e \geq 0; \qquad r = 0 \;\Leftrightarrow\; e = 0 \tag{58}$$

Последователи Маркса трактуют эту теорему, как математическое доказательство идеологического предположения Маркса, что источником прибылей капиталистов является эксплуатация рабочих.

Выше мы уже видели, что это утверждение не подтверждается точным решением системы уравнений для цен равной рентабельности и системы уравнений для цен производства, так как точные решения этих систем уравнений показывают, что, если наёмный труд вообще не используется в производстве, то прибыли всё же остаются положительными. Очевидно, что в таком случае прибыли не могут быть результатом эксплуатации рабочих, так как эксплуатировать в этом случае просто некого - наёмный труд не используется в этом случае.

В то же время, теорема Окишио выполняется математически. Доказательством является обращение прибылей в ноль, при условии обращения в ноль параметра эксплуатации, для случая экономики, использующей наёмный труд. Но если наёмный труд не применяется, то прибыли не обращаются в ноль, хотя в этом случае эксплуатация отсутствует тоже, так как нет предмета для эксплуатации. Но прибыли не равны нулю.

Условие отсутствия эксплуатации – это выполнение равенства $w \cdot L_2 = 1$, где L_2 - стоимость (составной) единицы потребления, рассчитанная по тому же алгоритму расчёта стоимостей, который действует в докапиталистической экономике. Из равенства $w \cdot L_2 = 1$ следует формула для ставки реальной оплаты труда $w = \frac{1}{L_2}$, при которой норма эксплуатации $e = \frac{1 - w \cdot L_2}{w \cdot L_2}$ обращается в ноль. При этой ставке реальной оплаты труда число Фробениуса социо-технической матрицы будет равно единице $\Lambda_F = 1$ и связанная с ним норма рентабельности $r = \frac{1}{\Lambda_F} - 1$ будет равна нулю. Таким образом условие отсутствия эксплуатации математически эквивалентно условию обнуления нормы рентабельности. Если $w \cdot L_2 < 1$, то норма эксплуатации $e > 0$ и число Фробениуса социо-технической матрицы будет меньше единицы, а норма прибыли будет больше нуля.

Выполнение теоремы Окишио демонстрирует График 13, показывающий на числовых примерах зависимость нормы рентабельности от параметра эксплуатации. При ненулевых затратах труда (как и при нулевых затратах труда) при нулевом параметре эксплуатации норма рентабельности равна нулю, а при положительном параметре эксплуатации норма рентабельности больше нуля.

Поскольку норма рентабельности больше нуля и при **нулевых** затратах труда, когда никакой эксплуатации точно нет, то математическая зависимость нормы прибыли от параметра эксплуатации для этого случая не означает, что прибыль возникает непременно,

вследствие эксплуатации работников. Ведь если труд наёмных работников вообще не используется (автоматизированная экономика) то хотя формально теорема Окишио по-прежнему выполняется и в этом случае, однако никакой эксплуатации в этом случае нет, так как некого эксплуатировать.

Если для этого случая (в экономике, не использующей наёмный труд) формально потребовать выполнения условия отсутствия эксплуатации, то прибыли обратятся в ноль, хотя они не равны нулю в общем случае, когда это условие не накладывается.

Это значит, что в данной теореме речь идёт не о влиянии факта эксплуатации работников на прибыли капиталистов, а о взаимосвязи двух математически эквивалентных утверждений.

Первое утверждение - определяет норму прибыли, а второе утверждение можно толковать как условие эксплуатации при двух условиях:

(1) если в экономике применяется наёмный труд работников и

(2) если формально перенести определение стоимости предметов потребления, верное для докапиталистической экономики, в капиталистическую экономику.

Однако такая операция, вовсе не кажется логически обоснованной, и может быть оспорена. Иначе говоря, фундаментальная теорема Маркса является выражением математической эквивалентности приведённых выше (формулы (58)) математических выражений неравенства и равенства, которые можно было бы истолковать как связь эксплуатации работников с нормой прибыли, если только два названные выше условия (1) и (2) на самом деле выполнены.

На норму прибыли влияет значение собственного числа Фробениуса социо-технической матрицы A_1. Число Фробениуса этой матрицы является максимальным по модулю положительным вещественным корнем кубического уравнения (характеристического уравнения $Det\left(A_1 - \Lambda \cdot I\right) = 0$). Кубическое уравнение для определения числа Фробениуса имеет вид (47) – (51):

$$-a2d1l0w + a1d2l0w + a2d0l1w - a0d2l1w - a1d0l2w + a0d1l2w + (a1d0 - a0d1 - d2l0w - a2l1w + a1l2w + d0l2w\Lambda + - a1 - d0 - l2w\Lambda 2 + \Lambda 3 = 0 \qquad (59)$$

Норма прибыли r связана с числом Фробениуса Λ_F равенством:

$$\Lambda_F \equiv \frac{1}{1+r} \qquad (21)$$

Если норма прибыли равна нулю, то число Фробениуса равно единице $\Lambda = 1$ и тогда уравнение (59) сводится к равенству:

$$-a2d1l0w + a1d2l0w + a2d0l1w - a0d2l1w - a1d0l2w + a0d1l2w + (a1d0 - a0d1 - d2l0w - a2l1w + a1l2w + d0l2w + - a1 - d0 - l2w + 1 = 0 \qquad (60)$$

Если рассматривать равенство (60) как уравнение относительно реальной ставки оплаты труда w, то решением этого уравнения будет:

$$w = w_0 = \frac{1}{L_2} = \frac{\left(1-a_1\right)\left(1-d_0\right) - a_0 d_1}{(1-a_1)d_2 l_0 + a_0 d_2 l_1 + a_2(d_1 l_0 + l_1(1-d_0)) + \left(\left(1-a_1\right)\left(1-d_0\right) - a_0 d_1\right) l_2} \qquad (61)$$

То есть если норма прибыли равна нулю, то ставка оплаты труда совпадает со ставкой оплаты w_0, при которой параметр эксплуатации равен нулю. Этими выкладками доказывается второе из условий фундаментальной теоремы (58).

Обозначим знаменатель в формуле (61) как Q. Тогда уравнение (61) можно переписать в виде:

$$Q \cdot \left(w - w_0\right) = 0 \qquad (62)$$

$$Q=(1-a_1)d_2l_0+a_0d_2l_1+a_2(d_1l_0+l_1(1-d_0))+\big((1-a_1)(1-d_0)-a_0d_1\big)l_2 \quad (63)$$

Кубическое уравнение (59), можно переписать в виде[34]:

$$f(x)=K_0+K_1x+K_2x^2+K_3x^3=0 \quad (47)$$

$$K_0=w\cdot\left(-a_2d_1l_0+a_1d_2l_0+a_2d_0l_1-a_0d_2l_1-a_1d_0l_2+a_0d_1l_2\right) \quad (48)$$

$$K_1=a_1d_0-a_0d_1-d_2l_0w-a_2l_1w+a_1l_2w+d_0l_2w \quad (49)$$

$$K_2=-a_1-d_0-l_2w \quad (50)$$

$$K_3=1 \quad (51)$$

Учитывая (21), из уравнения (47) после умножения его на $(1+r)^3$ следует следующее уравнение:

$$Q\cdot(w-w_0)+r\cdot\left\{K_0\cdot\left(r^2+3\cdot r+3\right)+K_1\cdot(r+2)+K_2\right\}=0 \quad (64)$$

Из равенства (62) следует, что это равенство выполняется, если $r=0$ и $w=w_0$. Так как равенство $w=w_0$ математически эквивалентно условию отсутствия эксплуатации $e=0$, то вторая часть фундаментальной теоремы выполняется. Чтобы доказать выполнение первой части этой теоремы, можно рассмотреть отношение $\frac{dr}{dw}$ в окрестности точки $r=0$ и $w=w_0$, рассматривая левую часть равенства (64) как функцию переменных r и w.

$$F(r;w)\equiv Q\cdot(w-w_0)+r\cdot\left\{K_0\cdot\left(r^2+3\cdot r+3\right)+K_1\cdot(r+2)+K_2\right\} \quad (65)$$

Взяв частные производные от этой функции по r и по w, находим:

$$\frac{dr}{dw}=-\frac{F'_w}{F'_r} \quad (66)$$

Производные считаем в точке $r=0$ и $w=w_0$ и тогда знак правой части (66) будет меньше нуля и, следовательно уменьшению ставки оплаты, а значит росту параметра эксплуатации соответствует рост нормы прибыли. Этим доказывается первая часть фундаментальной теоремы (58). Детали расчётов в Programs-10 - 12 Приложения 2.

Для системы цен производства (35)-(37) фундаментальная теорема тоже выполняется.

Система уравнений для цен производства:

$$\begin{cases} d_0+p_1\cdot a_0+p_2\cdot w\cdot l_0+r\cdot(b_0+p_1\cdot X_0+p_2\cdot Y_0)=1 \\ d_1+p_1\cdot a_1+p_2\cdot w\cdot l_1+r\cdot(b_1+p_1\cdot X_1+p_2\cdot Y_1)=p_1 \\ d_2+p_1\cdot a_2+p_2\cdot w\cdot l_2+r\cdot(b_2+p_1\cdot X_2+p_2\cdot Y_2)=p_2 \end{cases} \quad (58)$$

Перепишем эту систему в векторно-матричной форме. Для этого введём дополнительно матрицу авансированных капиталов T:

$$T=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ X_0 & X_1 & X_2 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Тогда система (58) может быть записана в виде:

[34] Собственные значения обозначены буквой “x”.

$$\vec{p}\cdot A_1 + r\cdot\vec{p}\cdot T = \vec{p}\,; \qquad \vec{p}\equiv(1; p_1; p_2) \tag{68}$$

После переноса в левую часть вектора цен, получим:

$$\vec{p}\cdot(A_1 + r\cdot T - I) = 0 \tag{69}$$

Не нулевое решение существует, если определитель матрицы левой части этого равенства равен нулю:

$$Det(A_1 + r\cdot T - I) = 0 \tag{70}$$

Решая уравнение (70), находим норму прибыли как положительный корень этого кубического уравнения. Если в уравнении (70) положить $r = 0$, то получим уравнение для нормы оплаты труда, решая которое убеждаемся, что опять $w = w_0$, а значит, параметр эксплуатации равен нулю $e = 0$. Таким образом, доказывается вторая часть фундаментальной теоремы. Доказательство первой части проводится аналогично, как это было сделано для системы цен равной рентабельности. Детали расчётов – в Programs-10-12 Приложения 2.

12. Простое доказательство первой части фундаментальной теоремы.

Надо доказать эквивалентность неравенств:

$r \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e \geq 0$

Доказательство:

По определению, норма эксплуатации e зависит от ставки оплаты w по формуле:

$$e = \frac{1 - w\cdot L_2}{w\cdot L_2} = \frac{1}{w\cdot L_2} - 1 \tag{9}$$

Из этой формы следует, что росту параметра эксплуатации соответствует уменьшение ставки оплаты наёмного труда:

$$e\nearrow \;\Rightarrow\; \mathrm{w}\searrow \tag{71}$$

По теореме о монотонности корня Перрона (числа Фробениуса), уменьшение элементов социо-технической матрицы прямых затрат капиталистической экономики будет сопровождаться уменьшением спектрального радиуса (корня Перрона).

Теорема о монотонности спектрального радиуса неотрицательной неразложимой матрицы.

"Пусть A и B - неотрицательные неразложимые матрицы. Если $A \leq B$ и $A \neq B$, то $\rho(A) \leq \rho(B)$"[35], где $\rho(A)$ и $\rho(B)$ - спектральные радиусы (корни Перрона, числа Фробениуса) матриц A и B.

Таким образом, если ставка оплаты уменьшается $\mathrm{w}\searrow$, элементы третьей строки неотрицательной матрицы A_1 уменьшаются, и значит, по теореме о монотонности спектрального радиуса, корень перрона (число Фробениуса) тоже уменьшается:

$$A \leq B \;\Leftrightarrow\; \rho(A) < \rho(B) \tag{72}$$

Поскольку третья строка матрицы A_1 зависит от нормы оплаты труда, то уменьшение элементов этой строки, согласно (72), будет приводить к уменьшению корня Перрона, и, как следствие, к увеличению нормы прибыли, согласно формуле (21):

[35] Альпин Ю. А. (2015) Неотрицательные матрицы. Казань. Казанский федеральный университет. Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, стр. 35, Теорема 2.

$$\Lambda_F \equiv \frac{1}{1+r} \tag{21}$$

Таким образом, имеем следующую цепь неравенств:

$$e \nearrow \Rightarrow \text{w} \searrow \Rightarrow \Lambda_F \searrow \Rightarrow r \nearrow \tag{73}$$

Если $e = 0$ то $w = w_0 = \frac{1}{L_2}$ и $r = 0$, как было доказано ранее – формулы (60)-(61).

Доказательство завершено.

13. ТРИ СИСТЕМЫ ЦЕН СТАНДАРТНОЙ ВЕРСИИ ТТС.

Стандартная версия ТТС рассматривает три системы цен. Для модели трёх секторов, производящих драгоценный металл (выполняет функции денег), средства производства и предметы потребления, уравнения первой системы для цен производства имеют следующий вид.

СИСТЕМА-1. Цены производства.

$$\begin{cases} d_0 + a_0 \cdot p_1 + w \cdot l_0 \cdot p_2 + R_a \cdot (b_0 + X_0 \cdot p_1 + Y_0 \cdot p_2) = 1 \\ d_1 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_1 \cdot p_2 + R_a \cdot (b_1 + X_1 \cdot p_1 + Y_1 \cdot p_2) = p_1 \\ d_2 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_2 \cdot p_2 + R_a \cdot (b_2 + X_2 \cdot p_1 + Y_2 \cdot p_2) = p_2 \end{cases} \quad (74)$$

Сектор 0 производит драгоценный металл, выполняющий функции денег. За единицу продукции секторов 1 (средства производства) и 2 (предметы потребления) берётся валовой выпуск продукции, то есть составная единица всех товаров, произведённых за единицу времени в данном секторе.

$d_0;\ d_1;\ d_2$ - прямые затраты драгоценных металлов на производство единицы товаров в секторах 0, 1, 2.

$a_0;\ a_1;\ a_2$ - прямые затраты средств производства на производство единицы товаров в секторах 0, 1, 2.

$l_0;\ l_1;\ l_2$ - прямые затраты живого труда (в физиологическом смысле) на производство единицы товаров в секторах 0, 1, 2.

$b_0;\ b_1;\ b_2$ - денежный капитал, авансированный на производство товаров в секторах 0, 1, 2 в весовых единицах металла, выполняющего функции денег. За весовую единицу драгоценного металла, выполняющего функции денег берётся вес монеты достоинством в одну денежную единицу.

$X_0;\ X_1;\ X_2$ - постоянный капитал, авансированный на производство товаров в секторах 0, 1, 2 в единицах средств производства.

$Y_0;\ Y_1;\ Y_2$ - переменный капитал, авансированный на производство товаров в секторах 0, 1, 2 в единицах предметов потребления.

Единицы средств производства и предметов потребления – их валовые (годовые) выпуски.

$(1;\ p_1;\ p_2)$ - вектор-строка цен производства.

R_a - норма прибыли (годовая) на авансированный капитал.

СИСТЕМА-2. Цены равной рентабельности.

$$\begin{cases} (d_0 + a_0 \cdot p_1 + w \cdot l_0 \cdot p_2) \cdot (1 + R_b) = 1 \\ (d_1 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_1 \cdot p_2) \cdot (1 + R_b) = p_1 \\ (d_2 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_2 \cdot p_2) \cdot (1 + R_b) = p_2 \end{cases} \quad (75)$$

СИСТЕМА-3. Цены обмена товаров в докапиталистической экономике (когда норма прибыли была равна нулю).

$$\begin{cases} d_0 + a_0 \cdot p_1 + w \cdot l_0 \cdot p_2 = 1 \\ d_1 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_1 \cdot p_2 = p_1 \\ d_2 + a_1 \cdot p_1 + w \cdot l_2 \cdot p_2 = p_2 \end{cases} \quad (76)$$

Решение системы-1 будем помечать символом “a”, решение системы-2 пометим символом “b”, решение системы-3 пометим символом “c”.

Докажем сначала, что Система-3 имеет решением цены обмена по стоимости. Действительно, для стоимостей единиц товаров $L_0;\ L_1;\ L_2$ имеем систему уравнений.

СИСТЕМА-4. Стоимости товаров удовлетворяют следующим уравнениям.

$$\begin{cases} d_0 \cdot L_0 + a_0 \cdot L_1 + l_0 = L_0 \\ d_1 \cdot L_0 + a_1 \cdot L_1 + l_1 = L_1 \\ d_2 \cdot L_0 + a_1 \cdot L_1 + l_2 = L_2 \end{cases} \quad (77)$$

Переходим к стоимостным ценам.

$$p_k = \frac{L_k}{L_0};\quad k = 0;\ 1;\ 2 \quad (78)$$

Для этого разделим все уравнения на L_0.

$$\begin{cases} d_0 + a_0 \cdot p_1 + \dfrac{l_0}{L_0} = 1 \\ d_1 + a_1 \cdot p_1 + \dfrac{l_0}{L_0} = p_1 \\ d_2 + a_1 \cdot p_1 + \dfrac{l_0}{L_0} = p_2 \end{cases} \quad (79)$$

Сравнивая эту систему уравнений с СИСТЕМОЙ-3, убеждаемся, что они тождественно совпадают, если выполняется условие:

$$w \cdot p_2 = \frac{1}{L_0} \quad (80)$$

Это условие, учитывая определение (69), перепишем в виде:

$$w \cdot L_2 = 1 \quad (81)$$

Но это условие есть не что иное, как условие отсутствия эксплуатации, так как норма эксплуатации e равна:

$$e = \frac{l_k - w \cdot L_2 \cdot l_k}{w \cdot L_2 \cdot l_k} = \frac{1 - w \cdot L_2}{w \cdot L_2} \quad (82)$$

В числителе формула (82) стоит разность между живым трудом работника и трудом, овеществлённым в потребляемых им предметах потребления, которые он может приобрести за оплату выполненного им выполнения труда.

В стандартных обозначениях в числителе стоит разность (v + m) – v = m, в знаменателе стоит v. В итоге норма эксплуатации совпадает с нормой прибавочной стоимости m : v. Условие (72) эквивалентно условию отсутствия эксплуатации $e = 0$, которое выполняется в докапиталистической экономике, в которой капиталистическая прибыль отсутствует.

Это, конечно, не означает, что отсутствует всякая эксплуатация. В докапиталистических обществах отсутствует лишь капиталистическая эксплуатация и, как мы видим, этого достаточно, чтобы товары обменивались по стоимости. Таким образом, система-3 – это система для цен обмена по стоимости в докапиталистической экономике. Приведённые рассуждения можно рассматривать как математическое доказательство того, что в докапиталистической экономике товары обменивались по стоимости.

Для системы цен равной рентабельности (СИСТЕМА-2) программа Mathematica 10.4 находит точное аналитическое решение, тогда как уравнения для цен производства (СИСТЕМА-1) проще решать численно.

Рассмотрим числовой пример.

Пусть параметры d0; d1; d2; a0; a1; a2; l0; l1; l2 имеют следующие значения.

$$\begin{aligned} &d_0 = 0.2;\ \ d_1 = 0.02;\ \ d_2 = 0.06 \\ &a_0 = 0.1;\ \ a_1 = 0.4;\ \ a_2 = 0.5 \\ &l_0 = 0.1;\ \ l_1 = 0.2;\ \ l_2 = 0.3 \end{aligned} \tag{83}$$

(параметры выбраны так, чтобы валовой выпуск средств производства потреблялся бы в течение года и поэтому $a_0 + a_1 + a_2 = 1$. (84)

Пусть дополнительные параметры, входящие в систему цен производства (СИСТЕМА-1) имеют значения:

$$\begin{aligned} &b_0 = 0.2;\ \ b_1 = 2;\ \ b_2 = 5 \\ &X_0 = 10;\ \ X_1 = 20;\ \ X_2 = 12 \\ &Y_0 = 20;\ \ Y_1 = 10;\ \ Y_2 = 15 \end{aligned} \tag{85}$$

Рассмотрим на этом числовом примере, как решения трёх систем (СИСТЕМ-1, 2 и 3) цен взаимосвязаны.

Если увеличивать норму реальной оплаты труда от нуля до максимального значения, когда норма прибыли обратится в ноль, то вектора цен (1; p1a; p2a) (решение СИСТЕМЫ-1) и (1; p1b; p2b) (решение СИСТЕМЫ-2) сближаются, а норма прибыли Ra сближается с нормой рентабельности Rb, так как обе системы уравнений (СИСТЕМА-1) и (СИСТЕМА-2) при нулевой норме прибыли и норме рентабельности превращаются в СИСТЕМУ-3, которая описывает цены в экономике без прибыли,

По мере роста реальной ставки оплаты труда w, происходит сближение решений СИСТЕМ 1 и 2. То есть, если норма прибыли достаточно мала, решения СИСТЕМ-1 и 2 будут мало отличаться. При некоторой (максимально возможной при капитализме) ставке оплаты труда, норма прибыли (и норма рентабельности) обращаются в ноль, и тогда цены СИСТЕМЫ-1 и СИСТЕМЫ-2 становятся равными и будут равны ценам обмена по стоимости.

Эти закономерности иллюстрируют приведённые ниже Графики.

График 25. Цена производства p1a и цена равной рентабельности p1b в зависимости от ставки реальной оплаты труда.

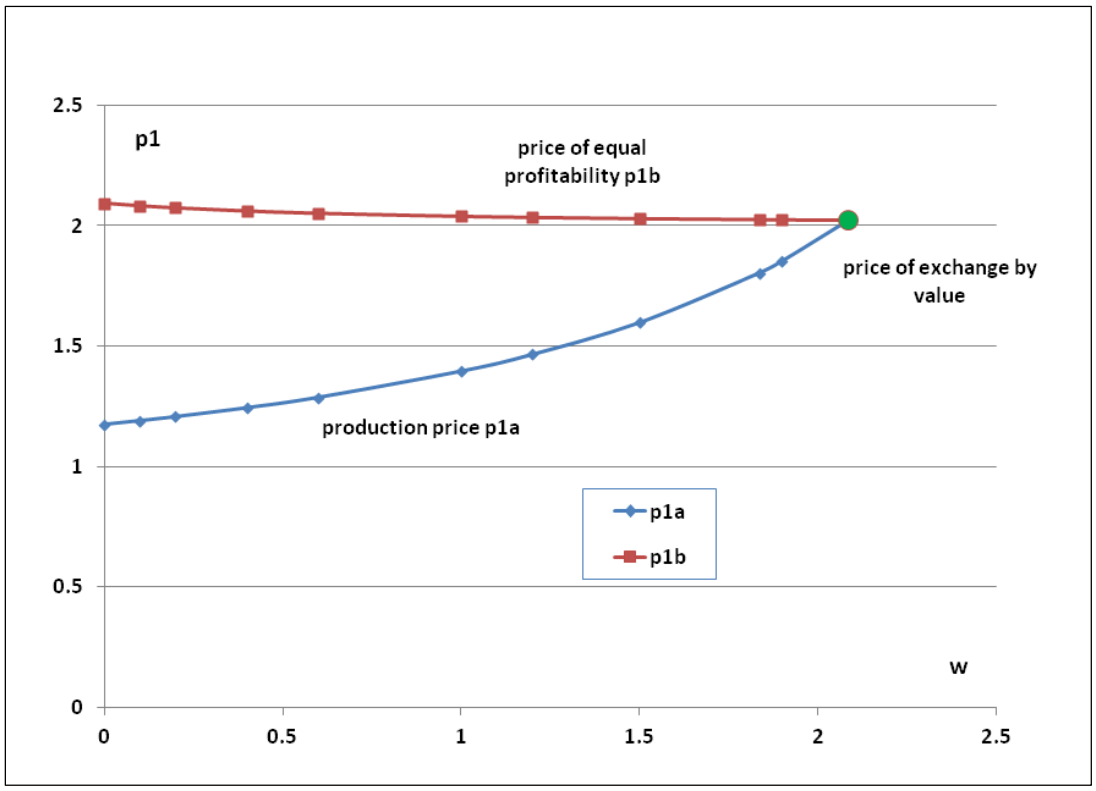


График 26. Цена производства p2a и цена равной рентабельности p2b в зависимости от ставки реальной оплаты труда.

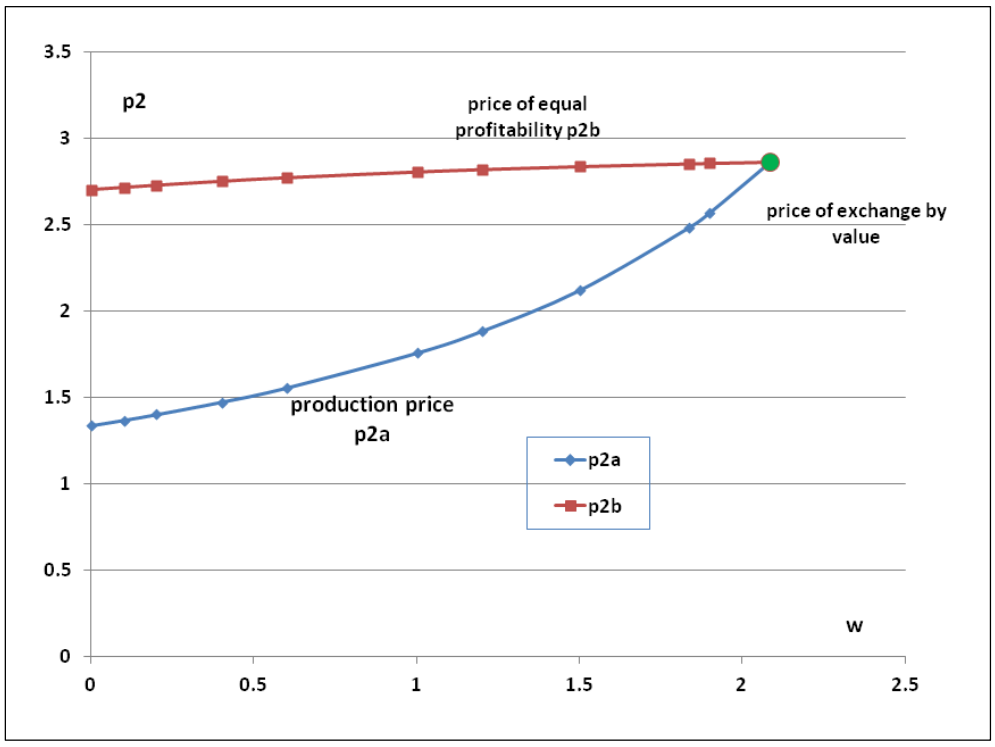
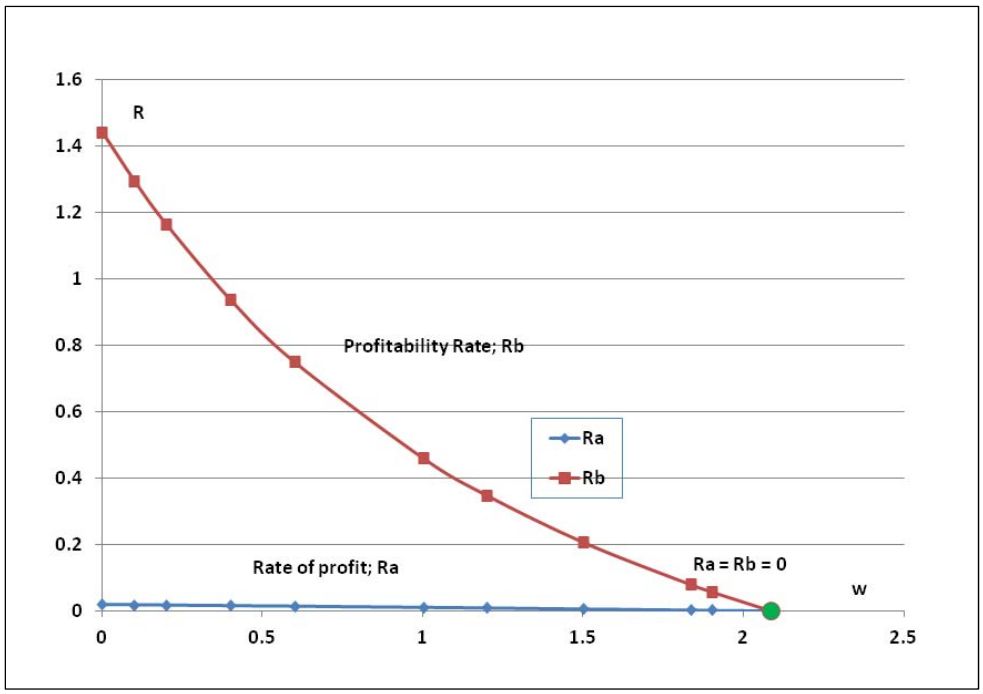


График 27. Норма прибыли Ra и норма рентабельности Rb в зависимости от ставки реальной оплаты труда.



Замечательно, что при малых значениях нормы прибыли (и рентабельности) решения СИСТЕМ-1 и 2 почти одинаковые и отличие этих решений тем меньше, чем ниже норма прибыли и рентабельности. Это свойство решений обосновывает правомерность замены СИСТЕМЫ-1 на СИСТЕМУ-2 при изучении свойств решения для системы цены производства. В большинстве статей, посвящённых формализации и вычислению цен производства и особенности в статьях, в которых рассматривается «проблема трансформирования», используется именно СИСТЕМА-2 (система цен равной рентабельности). Приведенные выше результаты (Графики 25 – 27) обосновывают такую замену цен производства на цены равной рентабельности, так как в случае, когда норма прибыли низкая, обе системы цен почти совпадают.

Ещё один замечательный результат состоит в том, что при некотором значении ставки реальной оплаты труда норма прибыли и норма рентабельности обращаются в ноль ОДНОВРЕМЕННО. Это следствие того, что при нулевой норме прибыли СИСТЕМА-1 превращается в СИСТЕМУ-3, но точно так же при нулевой норме рентабельности СИСТЕМА-2 также превращается в СИСТЕМУ-3.

Приведём также Графики зависимости цен от прямых затрат живого труда l1. При некотором значении l1 норма прибыли и норма рентабельности обращаются в ноль и СИСТЕМЫ-1 и 2 превращаются в СИСТЕМУ-3, решения которой совпадают с ценами обмена по стоимости. Все три решения изображены на Графиках 28 и 29.

График 28. Цена производства p1a, цена равной рентабельности p1b и цена обмена по стоимости p1c в зависимости от прямых затрат труда l1.

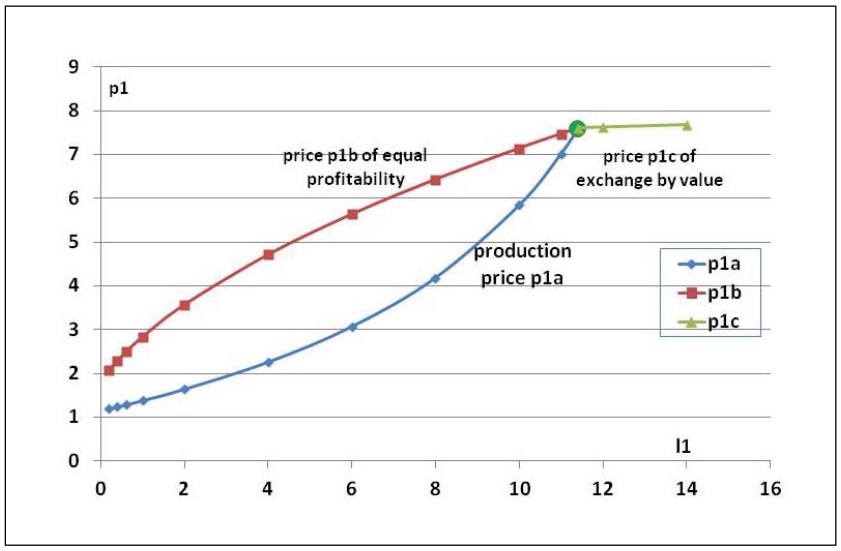
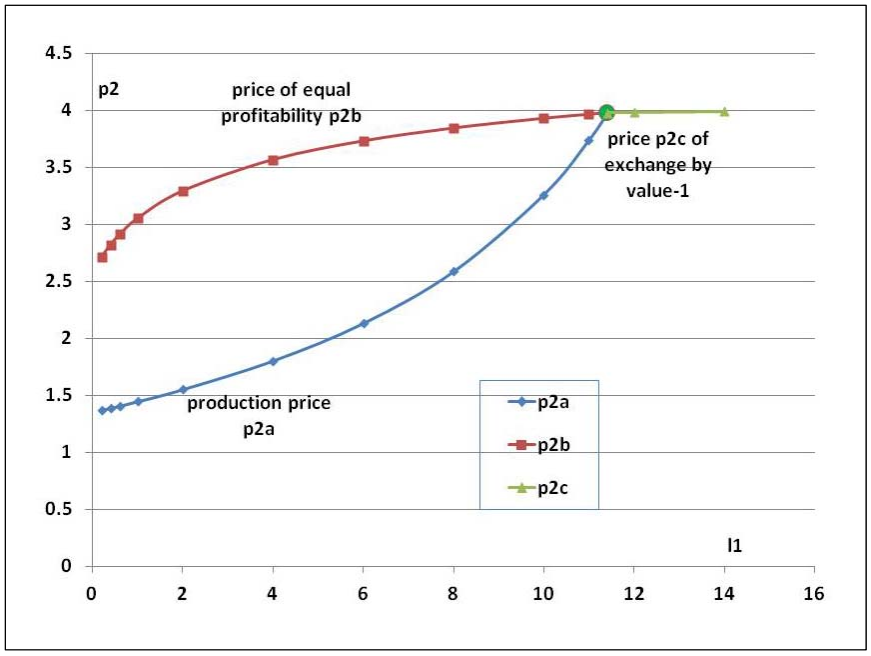


График 29. Цена производства p2a, цена равной рентабельности p2b и цена обмена по стоимости p2c в зависимости от прямых затрат труда l1.



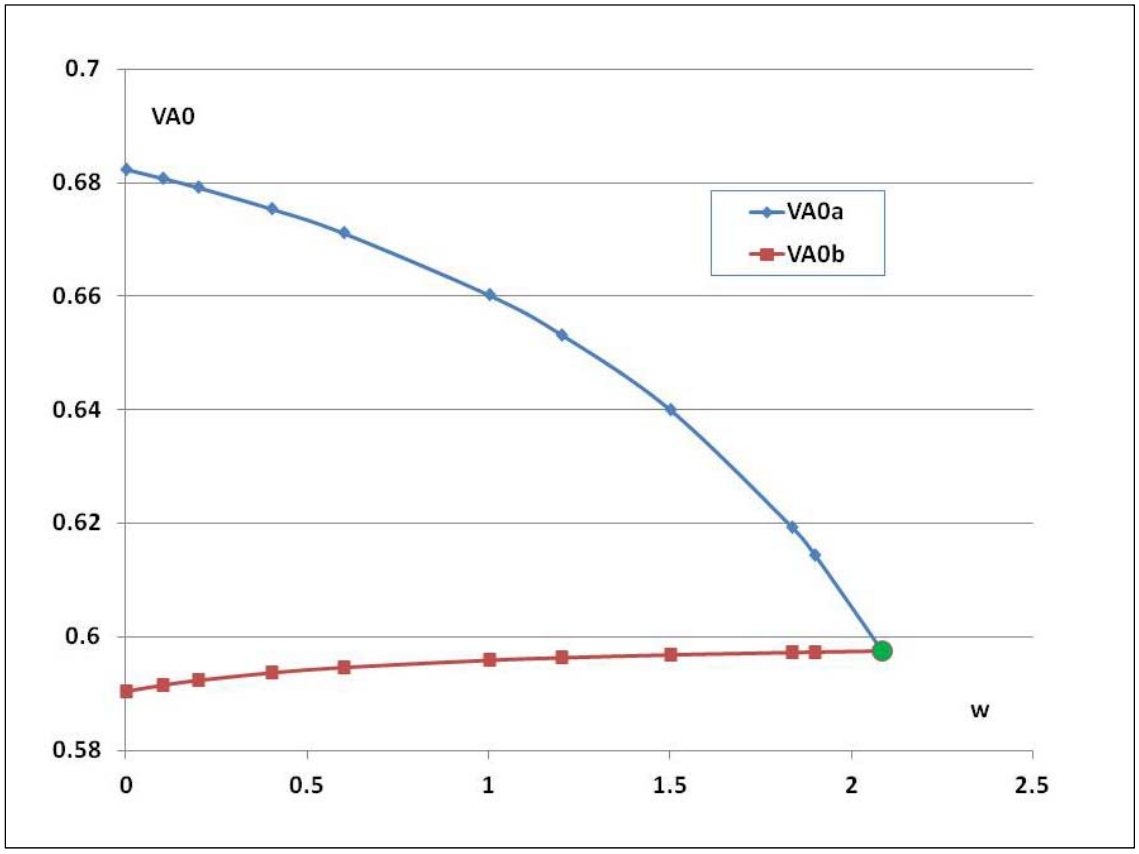
СИСТЕМА-2 проще для анализа, так как она имеет простое аналитическое решение, которое программа Mathematica 10.4 даёт за короткое время. Аналитическое решение СИСТЕМЫ-1 требует больших вычислительных ресурсов, и поэтому эту систему проще решать численно.

Добавленная стоимость в единице продукции не является фиксированной величиной, но с ростом нормы реальной оплаты труда, добавленная стоимость (измеренная в деньгах) меняется. При этом стоимость товара, выполняющего функции денег (индекс 0) постоянна, так как не зависит от ставки реальной оплаты труда. Поэтому изменение добавленной стоимости в зависимости от нормы реальной оплаты труда нельзя списать на инфляцию, связанную с обесцениванием денег. Утверждение Маркса, будто добавленная стоимость, как часть стоимости товара, определяемая лиша затратами живого

труда, не зависит от уровня оплаты труда[36]– не подтверждается результатами расчётов рассматриваемых числовых примеров. И цены и добавленные стоимости МЕНЯЮТСЯ с ростом ставки реальной оплаты труда – факт, который был известен экономистам задолго до Маркса.

Ниже приведены Графики зависимости добавленной стоимости в денежном выражении для первого и второго товаров (напоминаем, что первый товар в нашем примере – это выпуск средств производства, второй товар – выпуск предметов потребления).

График 30. Добавленная стоимость VA0 в единице товара, выполняющего функции денег, в СИСТЕМЕ-1 цен производства (VA0a) и в СИСТЕМЕ-2 цен равной рентабельности (VA0b) в зависимости от ставки реальной оплаты труда.



[36] Сообщение от Вт июл 29, 2025 7:06 pm о полемике Маркса с оуэнистом Уэстоном на Форуме «Социнтегрум», тема «Mathematica 10.4 против теории стоимости Маркса»: http://www.socintegrum.ru/forum/viewtopic.php?f=19&t=1110&view=unread#unread

График 31. Добавленная стоимость VA1 в единице товара, выполняющего функции средств производства, в СИСТЕМЕ-1 цен производства (VA1a) и в СИСТЕМЕ-2 цен равной рентабельности (VA1b) в зависимости от ставки реальной оплаты труда.

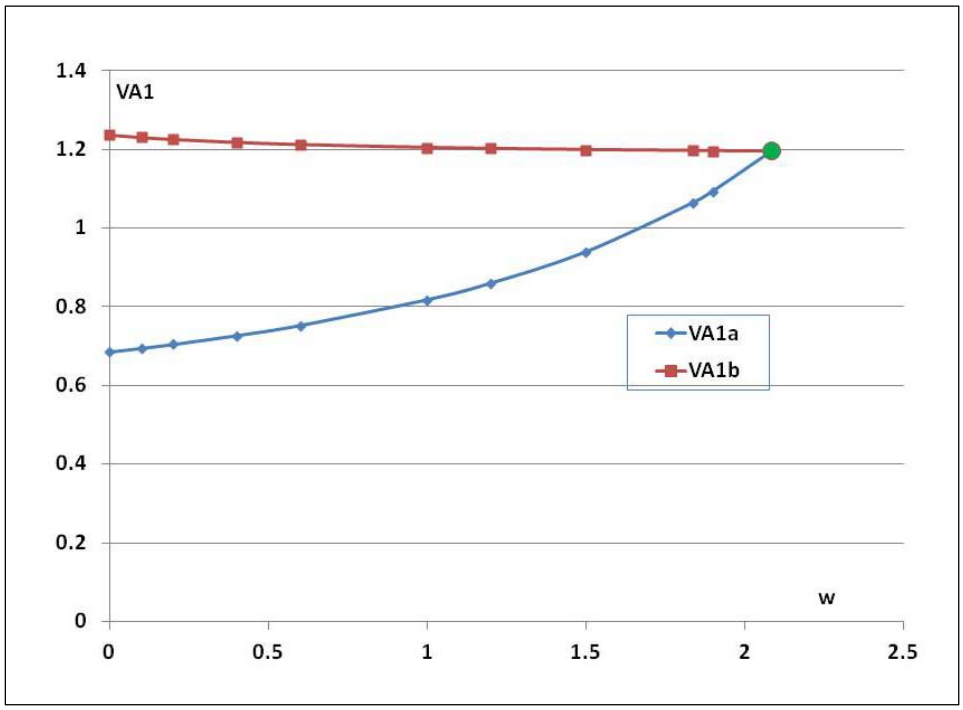
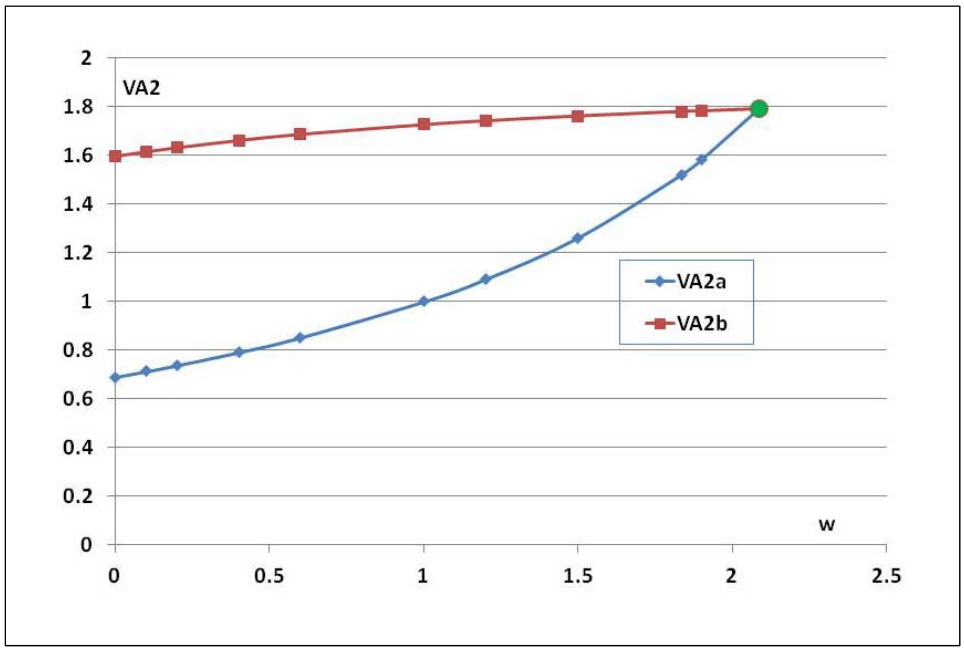


График 32. Добавленная стоимость VA2 в единице товара, выполняющего функции предметов потребления, в СИСТЕМЕ-1 цен производства (VA2a) и в СИСТЕМЕ-2 цен равной рентабельности (VA2b) в зависимости от ставки реальной оплаты труда.



Как ясно из приведённых Графиков, добавленная стоимость не является фиксированной величиной, хотя и состоит из зарплаты и прибыли. Маркс считал, что, если затраты живого труда на единицу продукции фиксированы, то фиксирована будет и добавленная стоимость. По Марксу изменение в норме реальной оплаты труда будет только менять пропорцию деления фиксированной добавленной стоимости на две части – часть рабочих и часть капиталистов. Как показывают наши расчёты, ситуация сложнее,

так как с ростом ставки реальной оплаты труда меняется и величина добавленной стоимости. Рассуждения Маркса верны, если рассматривать цены обмена по стоимости. В этом случае добавленная стоимость не зависит от ставки реальной оплаты труда. Однако спор Маркса с Уэстоном шёл о реальных ценах современного Марксу общества, - о ценах равной рентабельности или о ценах производства. Но для этих систем цен утверждение Маркса о независимости добавленной стоимости (в денежном выражении) и цен от ставки реальной оплаты труда – было ошибочным.

Графики 28 и 29 показывают взаимосвязь трёх систем цен. Надо иметь в виду, что это теоретические системы цен – все три системы цен – это просто три теоретических системы цен. Главный вопрос – соответствуют ли они фактическим ценам. Вопрос соответствия теории и фактов – это главный критерий правильности теоретического описания реальных фактов.

Что мы видим на этих Графиках? При уменьшении затрат живого труда l_1 цены обмена по стоимости p_{1c}; p_{2c} медленно уменьшаются при некотором КРИТИЧЕСКОМ значении затрат живого труда l_{1cr} превращаются в систему цен производства p_{1a}; p_{2a} и (или) в систему цен равной рентабельности p_{1b}; p_{2b}, при которых часть добавленной стоимости начинает присваивать капиталист.

В наших числовых примерах критическое значение затрат живого труда $l_{1cr} \approx 11.4087$. Если $l_1 < l_{1cr}$ то возможна капитализация экономики, если $l_1 > l_{1cr}$ то прибыль капиталистов отсутствует и товары обмениваются по стоимости. Важно, что система цен обмена по стоимости превращается в систему цен производства (или равной рентабельности) непрерывно и с уменьшением затрат живого труда l1 происходит снижение цен. Понижению затрат живого труда $1l_1$ соответствует процесс капитализации промышленности, который, согласно данным Графикам должен сопровождаться СНИЖЕНИЕМ цен.

Однако эта картина (соответствующая стандартной версии ТТС) не соответствует фактам, которые показывают не снижение, а именно рост цен в переходном периоде капитализации промышленности в Европе начиная с середины 18 века. Поскольку этот рост цен едва ли можно объяснить инфляцией, вызванной ростом населения, или притоком драгоценных металлов в Европу – то можно предположить, что имеет место несоответствие между выводами стандартной версии ТТС и фактическими данными. Следовательно, в стандартную версию ТТС необходимо внести какие-то поправки, чтобы теория объясняла и соответствовала фактам, а не противоречила им.

Приведём также графики зависимостей прибыли от зарплаты в единице товаров секторов 0,1,2. Согласно стандартной версии ТТС сумма прибыли и зарплаты не должна зависеть от ставки реальной оплаты труда и должна быть равна добавленной стоимости в единице товара, которая фиксирована, если фиксированы прямые затраты труда на единицу продукции. То есть между зарплатой и прибылью в единице товаров должно выполняться равенство:

$$wage + profit = Const = VA \qquad (78)$$

Это равенство выполняется в докапиталистической экономике, в которой капиталистическая прибыль равна нулю, а добавленная живым трудом (который фиксирован заданными технологиями) стоимость (в денежной форме) равна зарплате.

Однако равенство (78) не выполняется в капиталистической экономике, где товары обмениваются по ценам производства (помечаем индексом “a”) “b” или по ценам равной рентабельности (помечаем индексом “b”). Ниже приведены графики зависимости

прибыли от зарплаты в единице продукции трёх секторов и показаны линейные тренды и их уравнения, которые доказывают, что равенство (78) в капиталистической экономике не выполняется, так как добавленная стоимость, как было показано выше, зависит от реальной ставки оплаты труда, а значит и от зарплаты в единице продукции.

График 33. Зависимость прибыли от зарплаты в секторе 0 (производство металла, выполняющего функции денег).

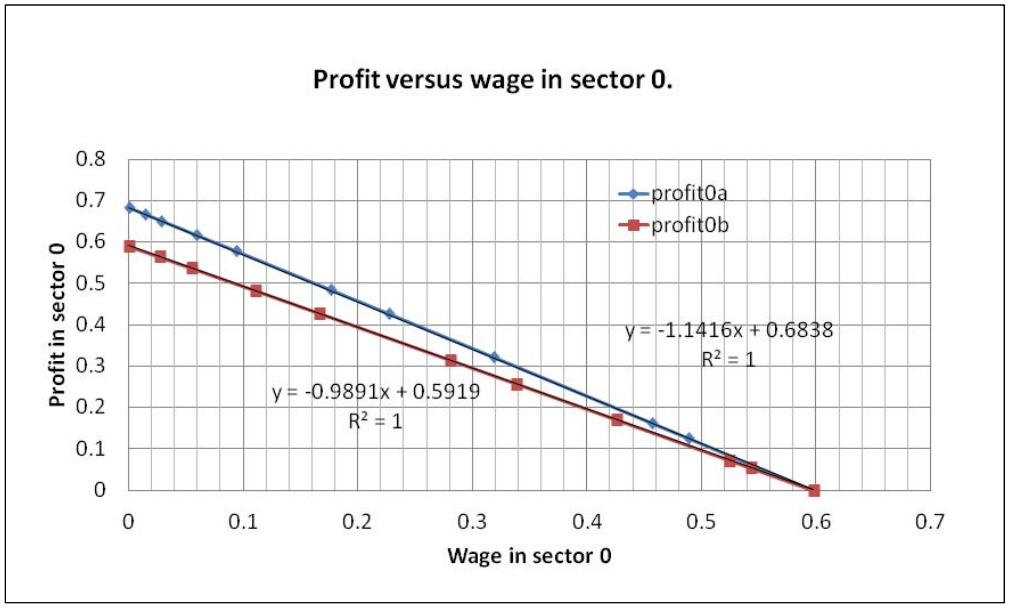


График 34. Зависимость прибыли от зарплаты в секторе 1 (производство средств производства).

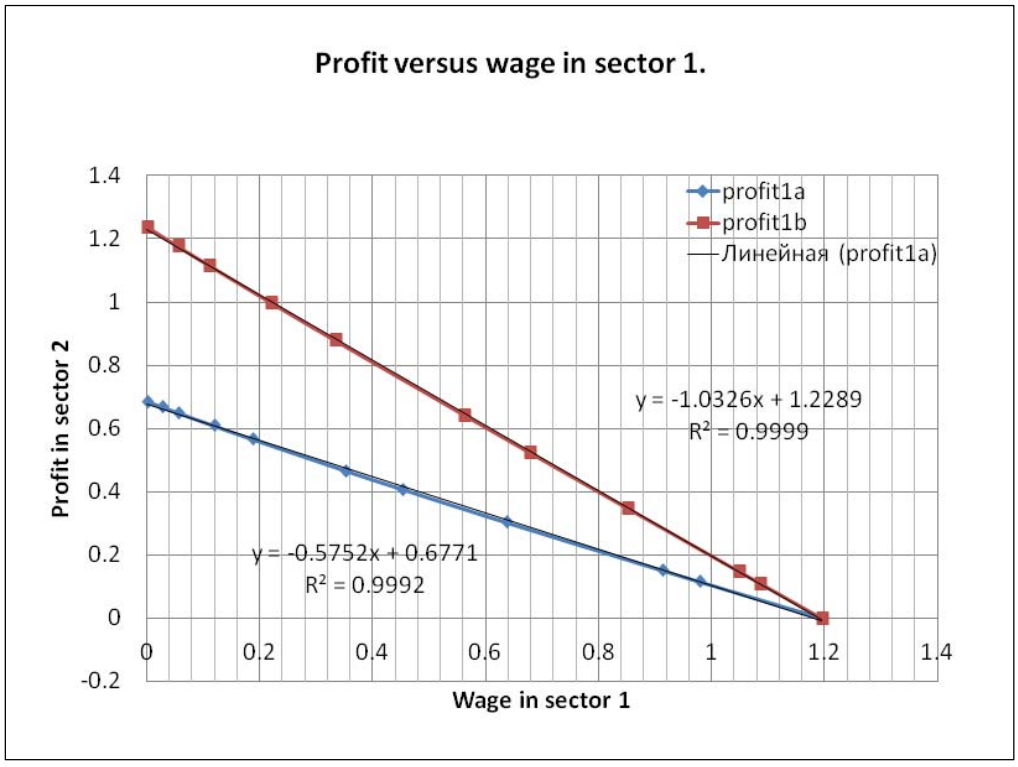
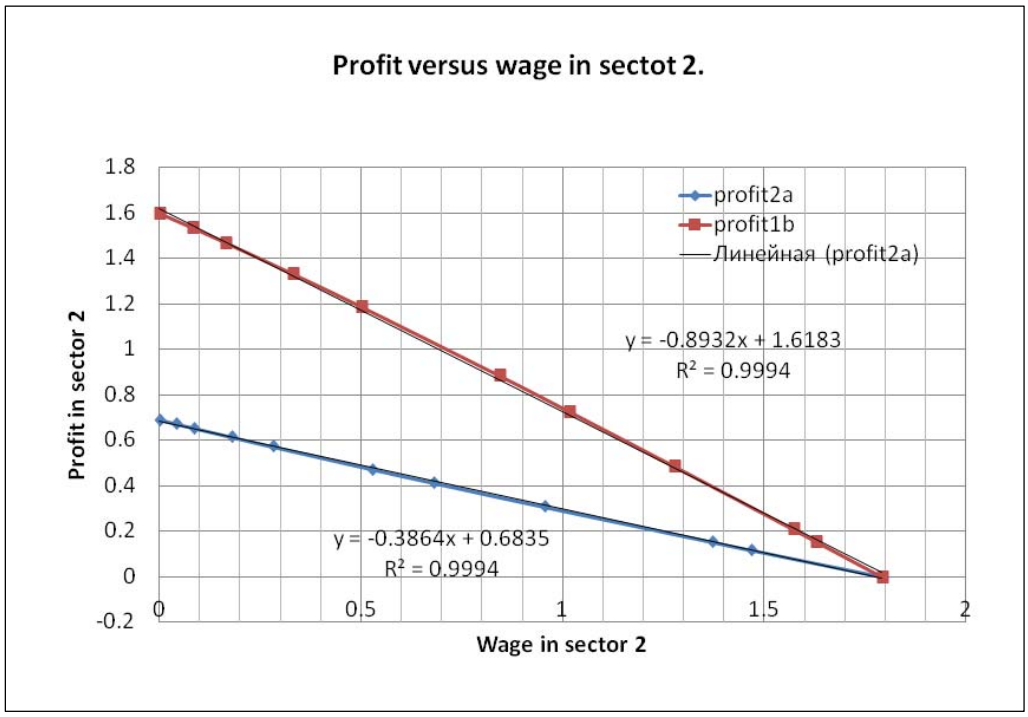


График 35. Зависимость прибыли от зарплаты в секторе 2 (производство предметов потребления).



Вычисления выполнены в программе Mathematica 10.4 – Program-16, 17, 18 Приложения 2.

14. ТАЙНА ПРИБАВОЧНОЙ СТОИМОСТИ.

Четвёртый том «Капитала» Маркса называется «Теории Прибавочной Стоимости». В этом томе Маркс комментирует предложенные разными экономистами теории, объясняющие происхождение прибавочной стоимости. Марксисты считают теорию прибавочной стоимости Маркса краеугольным камнем его учения. Сам Маркс (а за ним и его последователи) оценивали его теорию прибавочной стоимости как открытие исторического масштаба, после которого капитализм уже нельзя оправдывать как социально-приемлемый общественный строй, так как по Марксу процветание элит в этом обществе основывается на эксплуатации работников.

Согласно теории прибавочной стоимости Маркса, ежедневно миллионы трудящихся направляются по своим рабочим местам – цехам, кабинетам, шахтам… чтобы в течение своего рабочего дня часть этого дня отработать даром, на капиталиста и его прислужников, создав своим трудом средства жизни для привилегированного слоя общества. Создаваемая ежедневным трудом работников прибыль есть не что иное, как не оплаченный труд работников. Маркс утверждал, что эта не оплаченная часть труда (прибавочный труд) и есть прибыль капиталистов, которую они присваивают как собственники и хозяева предприятий, оплачивая работникам только стоимость их рабочей силы, то есть некий минимум, без которого рабочие и их семьи не смогут выжить.

По Марксу прибыль существует, потому что капиталисты эксплуатируют рабочих, то есть заставляют их работать на себя. Механизм эксплуатация при капитализме практически тот же, что и в условиях докапиталистических обществ.

Отличие в том, что в докапиталистических обществах работники лично зависимы от своих хозяев (рабы, крепостные крестьяне) - и поэтому их заставляют работать на хозяина под угрозой наказания (или смерти). Это может быть работа раба под наблюдением надсмотрщика или барщинная повинность крепостного крестьянина на поле господина или оброк, то есть отдача господину часть своего урожая.

В докапиталистических обществах происхождение прибавочной стоимости, таким образом, совершенно очевидно и наглядно – господин просто заставляет своих рабов или крепостных крестьян трудиться на себя, либо господин силой отбирает у своих лично зависимых работников часть их урожая. Прибавочная стоимость в докапиталистических обществах действительно основана на эксплуатации работников и возможна, вследствие личной зависимости работников от своего господина.

Маркс распространяет на капитализм этот вывод, верный для докапиталистических обществ, предполагая, что и в случае капитализма, при котором личная зависимость работников от хозяина отсутствует, тоже существует эксплуатация, которая совершается по такому же принципу. Только при капитализме она спрятана (замаскирована) за договором найма между формально свободным работником и капиталистом. Маркс считал, что и при капитализме работник часть своего рабочего времени работает на капиталиста, как крепостной крестьянин, выполняющий барщину на поле своего господина. Только при капитализме это деление всего рабочего времени на труд для себя и труд на господина не видно, существует не явно - спрятано, скрыто под видимостью договора свободного найма. Но эксплуатация и при капитализме есть, так как работник затрачивает больший труд, чем труд, который овеществлён в предметах потребления, которые работник покупает на свою зарплату.

Труд, которым распоряжается наёмный работник (то есть, труд, который овеществлён в покупаемых им предметах потребления) меньше затраченного работником труда – в этом и состоит скрытая эксплуатация наёмных работников. Вследствие этой

эксплуатации (так думал Маркс) часть труда работника присваивается капиталистами даром, и эта часть его труда есть не что иное, как прибавочная стоимость, которую в денежной форме называют прибылью капиталистов. То есть источником прибавочной стоимости при капитализме является эксплуатация труда наёмных работников.

Согласно Марксу, все прибыли капиталистов существуют лишь вследствие эксплуатации наёмных работников. Позже это утверждение было сформулировано и доказано и сейчас называется «фундаментальной теоремой Маркса» (теорема Окишио): норма прибыли положительна тогда и только тогда, когда норма эксплуатации больше нуля. Казалось бы, поставлена точка – раз прибыли возможны лишь при эксплуатации рабочих, то источник любой прибыли – именно эксплуатация и ничто иное.

Однако некоторые факты не вписываются в это простое объяснение происхождения прибылей эксплуатацией работников. Например, норма эксплуатации может быть неизменной, а норма прибыли при этом увеличиваться или уменьшаться. Например, снижение издержек производства, связанных с потреблением постоянного капитала, приводит к увеличению нормы прибыли, даже если норма реальной оплаты труда не меняется (или даже возрастает до определённого предела). Например, удешевление сырья или энергоресурсов или экономия на материалах, сырье, отоплении, освещении и т.п. приводит к росту нормы прибыли, даже когда ставка реальной оплаты труда не меняется и значит, не меняется и оплата труда. Капиталисты получают тогда дополнительную прибыль, не за счёт усиления эксплуатации рабочих, а за счёт умного экономного управления предприятием. Другой пример – перенос производств в те страны, где исторически стоимость рабочей силы ниже или где более благоприятные условия для производства. Например, часть промышленности США и Англии была перенесена в Юго-Восточную Азию (Китай, Южную Корею и т.д.) – что сопровождалось приростом нормы прибыли, вследствие экономии на оплате труда и снижении издержек производства, связанных с более тёплым климатом.
https://yandex.ru/q/question/zachem_ssha_perenesli_svoio_proizvodstvo_64bea9ee/

Свежий пример – падение нормы прибыли, вследствие ограничительных мер (подрыв северного потока и санкций) на ввоз в Европу дешёвых российских энергоресурсов, что привело к росту издержек производства и падению нормы рентабельности в европейской промышленности.

«Ситуация ухудшилась после резкого роста цен на энергоресурсы. К концу 2024 года объем производства в Германии оказался ниже уровня до пандемии, а промышленность сократилась примерно на 10%. Из-за высоких затрат на энергию крупные производители покидают Евросоюз. Особенно тяжело приходится автопрому, металлургии и химической отрасли. Хаджимурад Белхароев, доцент Института мировой экономики и бизнеса РУДН, отмечает: «Газ, нефть, металл и другие критически важные для индустрии ресурсы кратно подорожали. Именно доступные ресурсы из России десятилетиями позволяли развиваться немецкой промышленности и выпускать товары, конкурентоспособные по качеству и стоимости».
https://realnoevremya.ru/news/365817-krizis-v-promyshlennosti-germanii-poteri-i-peredislokaciya-proizvodstv

«Непрерывно растущие цены на электроэнергию сделали 2024 год временем продолжения экономического спада европейской индустрии. По данным бельгийского аналитического центра Orgalim, спад достиг 3,3% в металлообработке, 5,4% – в электротехнике, электронике и информационно-компьютерных технологиях и 5,3% в машиностроении».
https://paruskg.info/world/219207-%D0%AD%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9-%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D1%81-%D0%95%D0%B2%D1%80%D0%BE%D1%81%D0%BE%D1%8E%D0%B7-%E2%80%93-%D0%BD%D0%B0-%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B5-%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B9-%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8.html

Посмотрим на строение социо-технической матрицы прямых материальных затрат:

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ w \cdot l_0 & w \cdot l_1 & w \cdot l_2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Цены равной рентабельности находятся из решения уравнения на собственные вектора и значения для социо-технической матрицы.

$$\vec{p} \cdot A_1 = \Lambda \cdot \vec{p}\,; \qquad \Lambda \equiv \frac{1}{1+R} \qquad (19)$$

Вектор цен $\vec{p} = (p_0 \equiv 1;\ p_1;\ p_2)$ является положительным собственным вектором Фробениуса матрицы A_1. Собственное значение Λ является максимальным по модулю положительным собственным значением (собственное значение Фробениуса или корень Перрона) матрицы A_1. Корень Перрона является спектральным радиусом матрицы A_1 и для него доказана следующая теорема:

Теорема о монотонности спектрального радиуса неотрицательной неразложимой матрицы.

"Пусть A и B - неотрицательные неразложимые матрицы. Если $A \le B$ и $A \neq B$, то $\rho(A) \le \rho(B)$ ", где $\rho(A)$ и $\rho(B)$ - спектральные радиусы (корни Перрона, числа Фробениуса) матриц A и B[37].

По этой теореме, если уменьшать какие-либо элементы неотрицательной матрицы, спектральный радиус (корень Перона или, что то же самое, собственное число Фробениуса Λ) будет тоже уменьшаться. Но норма рентабельности R связана с собственным числом Фробениуса Λ соотношением:

$$R = \frac{1}{\Lambda} - 1 \qquad (79)$$

[37] Альпин Ю. А. (2015) Неотрицательные матрицы. Казань. Казанский федеральный университет. Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, стр. 35, Теорема 2.
https://kpfu.ru/portal/docs/F713777155/Alpin._.Neotricatelnye.matricy.pdf

Уменьшению числа Фробениуса Λ будет соответствовать рост нормы рентабельности, а, значит, и нормы прибыли. То есть, **достаточно лишь уменьшать какие-либо элементы социо-технической матрицы, чтобы тем самым уменьшить число Фробениуса Λ и увеличивать, вследствие этого, норму рентабельности (и норму прибыли).**

(1) Одним из методов увеличения нормы рентабельности является уменьшение элементов третьей строки, вследствие уменьшения нормы реальной оплаты труда w. Это интерпретируют как увеличение эксплуатации рабочих, что верно, то есть рост эксплуатации действительно может быть способом повышения нормы рентабельности. Но уменьшение нормы реальной оплаты труда возможно за счёт переноса производства в страны с менее высоким уровнем жизни и менее высокой стоимостью рабочей силы (как, например, перенос части американской промышленности в Китай). В последнем случае имеет место экономия на оплате труда, благодаря исторически сложившимся различиям в уровне жизни между разными странами.

(2) Однако есть и другие способы повысить норму рентабельности без усиления эксплуатации. Например, можно повысить производительность труда. Тогда при той же норме реальной оплаты труда прямые затраты труда l0; l1; l2 уменьшатся, и элементы третьей строки социо-технической матрицы тоже уменьшатся. В этом случае прирост нормы рентабельности происходит вследствие роста производительности труда, который был достигнут, благодаря правильным управленческим решениям капиталистов (или менеджеров).

(3) Ещё один способ повысить норму рентабельности – это экономия постоянного капитала, то есть уменьшение прямых затрат средств производства (элементов второй строки a0; a1; a2) на производство единицы продукции. И в этом случае прирост нормы рентабельности не связан с ростом эксплуатации, а является следствием умных управленческих решений по снижению прямых затрат на приобретение материалов, сырья и энергии (или их удешевлению), необходимых для производства. Отрицательным проявлением этого способа повышения рентабельности является замена крепких и долгосрочных материалов на качественно худшие аналоги, фальсификаты и суррогаты.

(4) Наконец, существует возможность повышать норму рентабельности, уменьшая прямые затраты драгоценных металлов в производстве (элементов первой строки d0; d1; d2).

Таким образом, любые управленческие решения, которые ведут к снижению издержек производства, будь то расходы постоянного или переменного капитала (уменьшающие элементы социо-технической матрицы) – приводят к росту нормы рентабельности (и прибыли). Только часть таких решений сопровождается ростом эксплуатации и значит, источником прибавочной стоимости может быть не только эксплуатация, но и правильные управленческие решения капиталистов, позволяющие уменьшать издержки производства. Вот об этом – втором источнике прибавочной стоимости Маркс не пишет[38]. Наоборот он всячески критикует догадки современных ему

[38] Точнее, Маркс не рассматривает экономию на издержках производства как самостоятельный, отдельный от эксплуатации, источник прибавочной стоимости. О влиянии экономии на постоянном и переменном капитале на норму прибыли Маркс пишет в третьем томе Капитала: *«Раз прибавочная стоимость дана, норма прибыли может быть увеличена только путём уменьшения стоимости постоянного капитала, необходимого для производства товара» (Маркс, К. Капитал, том 3 глава 5).*

экономистов, пытавшихся связать прибыль с грамотными управленческими решениями капиталистов. Как и в споре с оуэнистом Уэстоном Маркс опять был не прав.

В «Теориях Прибавочной Стоимости» Маркс разбирает взгляды на происхождение прибавочной стоимости многих экономистов и не соглашается с альтернативными объяснениями.
https://www.marxists.org/russkij/marx/cw/t26-1.pdf

Среди таких объяснений происхождения прибавочной стоимости отметим несколько из них:

(1) прибыль как плата за риск (глава 6, 3)а),

(2) прибыль как вознаграждение за «нематериальный» труд капиталистов (глава 4, 14) и 16)),

(3) прибыль как плата за труд по надзору и управлению (глава 3, 2) стр. 55).

Но Маркс отметает как эти, так и другие предложенные экономистами объяснения прибыли. Хотя совершенно очевидно, что все три объяснения частично верны, так как благодаря именно риску и грамотным управленческим решениям можно понизать издержки производства и тем самым повысить норму рентабельности (и прибыли).

Но для Маркса источник прибыли – это только прибавочный труд наёмных работников, а всё остальное как говорится «от лукавого». Но Прав ли был Маркс, утверждая, что единственным источником прибавочной стоимости при капитализме (как и в докапиталистических обществах) является эксплуатация трудящихся? Только ли эксплуатация является источником прибыли? Может ли в условиях капитализма возникать прибыль БЕЗ эксплуатации и не вследствие эксплуатации? Маркс считал, что нет.

«Прибыль капиталиста получается оттого, что он может продать нечто, чего он не оплатил»[39].

Однако приведённые выше числовые примеры, иллюстрирующие получение положительных прибылей в капиталистической экономике, не использующей наёмный труд, наглядно доказывают, что положительные прибыли возможны и без эксплуатации наёмных работников. Во всяком случае, математический анализ решений двух систем уравнений для цен равной рентабельности (СИСТЕМА-2) и для цен производства (СИСТЕМА-1) доказывает, что решения с положительным вектором цен и положительной нормой прибыли возможны и в экономике, не применяющей наёмный труд. То есть теоретически возможны положительные прибыли, возникающие НЕ из-за эксплуатации наёмных рабочих.

[39] Маркс, К. Капитал, том 3, глава 2.
https://www.marxists.org/russkij/marx/1893/capital_vol3/03.htm

15. Условия максимизации прибыли в единице продукции, согласно уравнениям цен равной рентабельности.

Графики 36 и 37, для прибылей в единице продукции первого и второго подразделений имеют вид функций от затрат живого труда в данном подразделении, имеющей точку максимума.

График 36. Зависимость прибыли в цене единицы товаров первого подразделения (средств производства) от затрат живого труда на производство единицы продукта в этом подразделении.

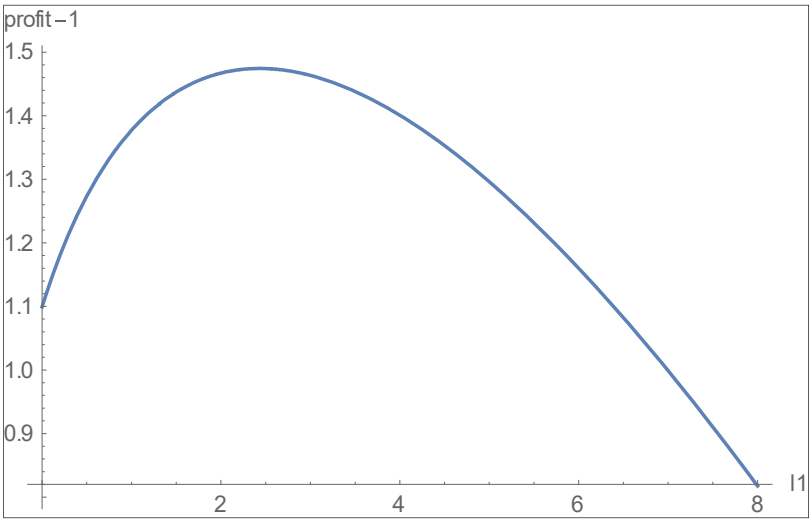
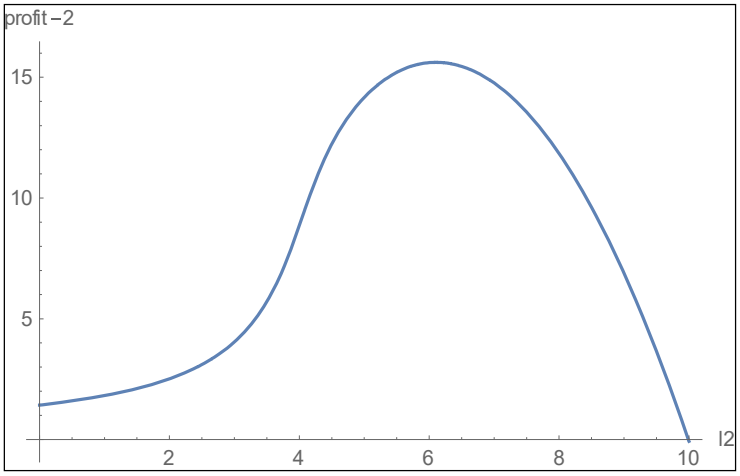


График 37. Зависимость прибыли в цене единицы товаров второго подразделения (предметов потребления) от затрат живого труда на производство единицы продукта в этом подразделении.



Приведём символические выражения этих функций.
Функция для прибыли в зависимости от затрат живого труда в единице продукции первого подразделения: (80)

$$\pi_1(l_1) = 1/(-((1-(a_2 l_1 + l_2)w + a_1(-1+l_2 w))/((d_1 + d_2 l_1 w - d_1 l_2 w)(-1+x))) +$$

$$+\frac{1}{d_1}(-1+(l_1 w(-a_2 d_1^{\,2} + d_2(a_1 d_1 + d_2 l_1 w - d_1 l_2 w)))/((d_1 + d_2 l_1 w - d_1 l_2 w)(d_2 l_1 w - d_1 l_2 w + d_1 \cdot x))))$$

Функция для прибыли в зависимости от затрат живого труда в единице продукции второго подразделения: (81)

$$\pi_2(l_2) = 1/(-\frac{1}{d_2} + (-1 + a_1 + (a_2 l_1 + l_2 - a_1 l_2)w)/((a_2 d_1 + d_2 - a_1 d_2)(-1 + x)) +$$

$$+(a_2(a_2 d_1^2 - d_2(a_1 d_1 + d_2 l_1 w - d_1 l_2 w)))/(d_2(a_2 d_1 + d_2 - a_1 d_2)(a_2 d_1 - a_1 d_2 + d_2 \cdot x)))$$

Здесь буквой x обозначен наибольший по модулю вещественный положительный корень кубического характеристического уравнения (47).

Значения параметров приведены в формуле (23).

Чтобы найти в программе Mathematica 10.4 точки максимума общем виде для этих функций требуются больше аппаратных ресурсов, чем тот компьютер, на котором проводились расчёты.

Берём производные $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1}$ и $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2}$. Приравнивая их нулю, находим точки максимума этих функций. Ввиду ограничения аппаратных возможностей, вычисления были выполнены в численном виде.

При параметрах (23) имеем следующие значения точек максимума.

Прибыль-1 в единице продукции первого подразделении максимальна, если:

$l_1 = 2.431726374964468$

Прибыль-2 в единице продукции второго подразделении максимальна, если:

$l_2 = 6.105527483257113$

Трёхмерные Графики для зависимостей $\pi_1(l_1; w)$ и $\pi_2(l_2; w)$ приведены ниже.

График 38. Зависимость прибыли в единице продукции первого подразделения от затрат живого труда и реальной ставки оплаты труда $\pi_1(l_1; w)$.

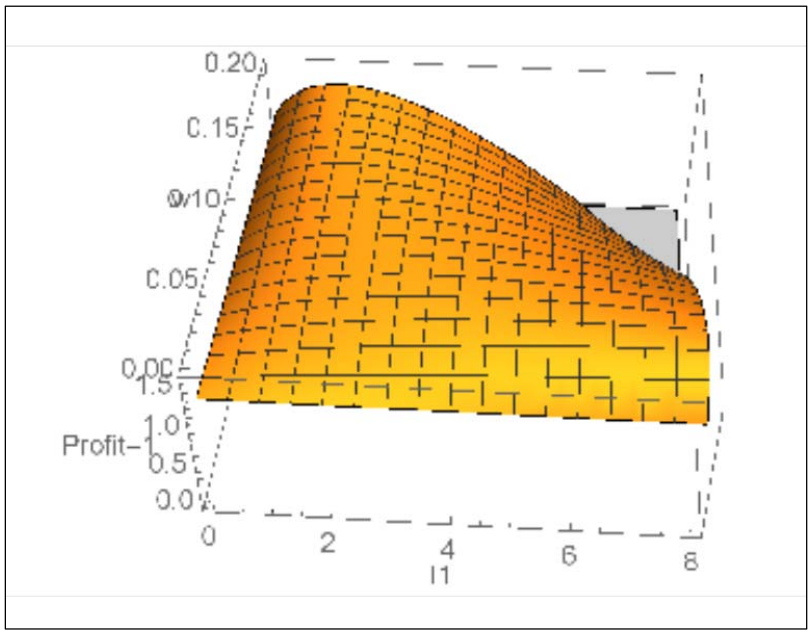


График 39. Зависимость прибыли в единице продукции второго подразделения от затрат живого труда и реальной ставки оплаты труда $\pi_2(l_2; w)$.

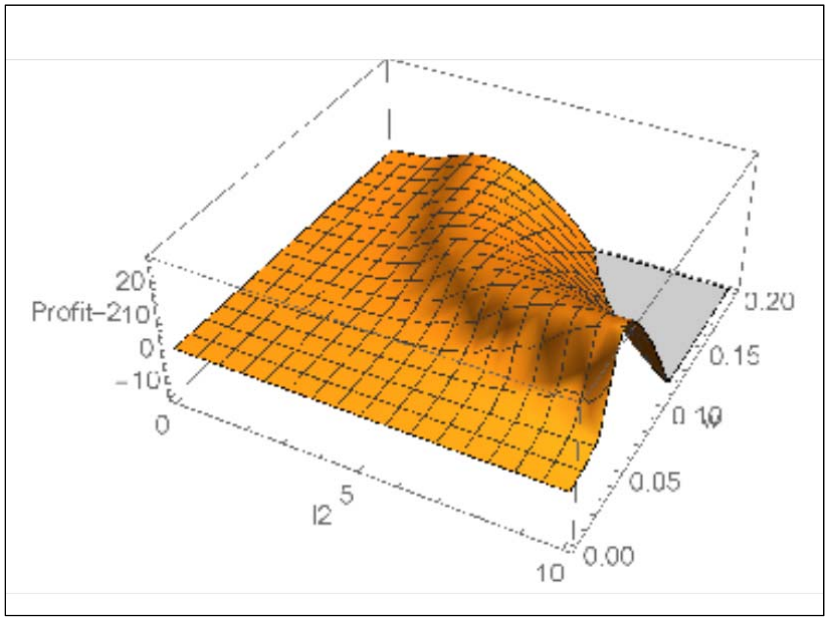


График 40. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Синий цвет соответствует значению $l_2 = 0$, зелёный цвет соответствует значению $l_2 = 1$, красный цвет соответствует значению $l_2 = 2$. Использован третий корень (Root-3).

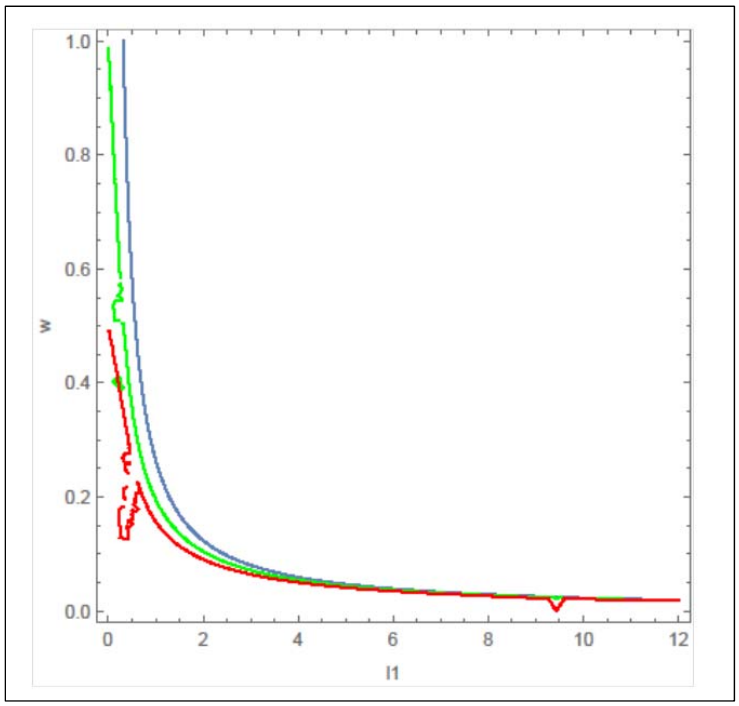


График 41. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$ - детализированный вид. Зелёный цвет соответствует значению $l_2 = 1$, красный цвет соответствует значению $l_2 = 2$. Использован третий корень (Root-3).

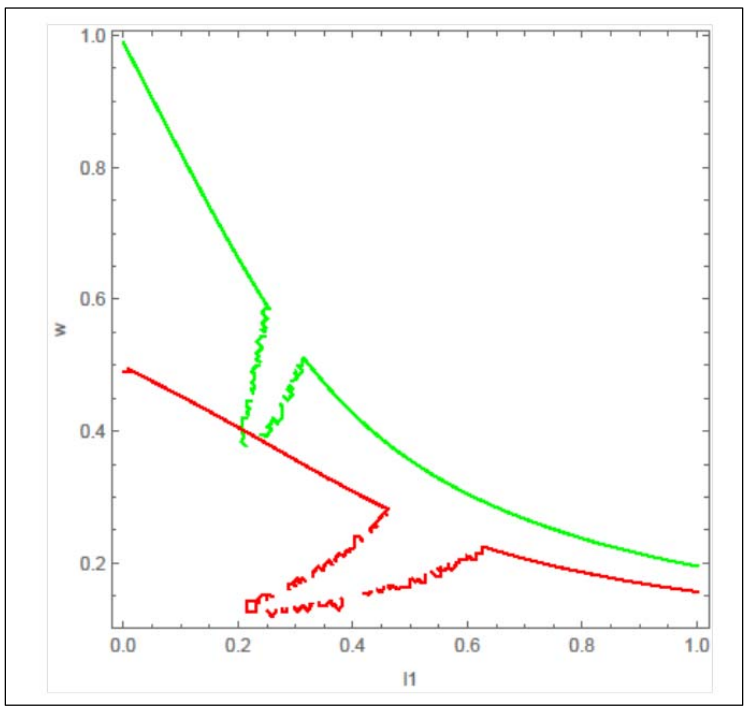


График 42. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Синий цвет соответствует значению $l_1 = 0$, зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$, красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$. Использован третий корень (Root-3).

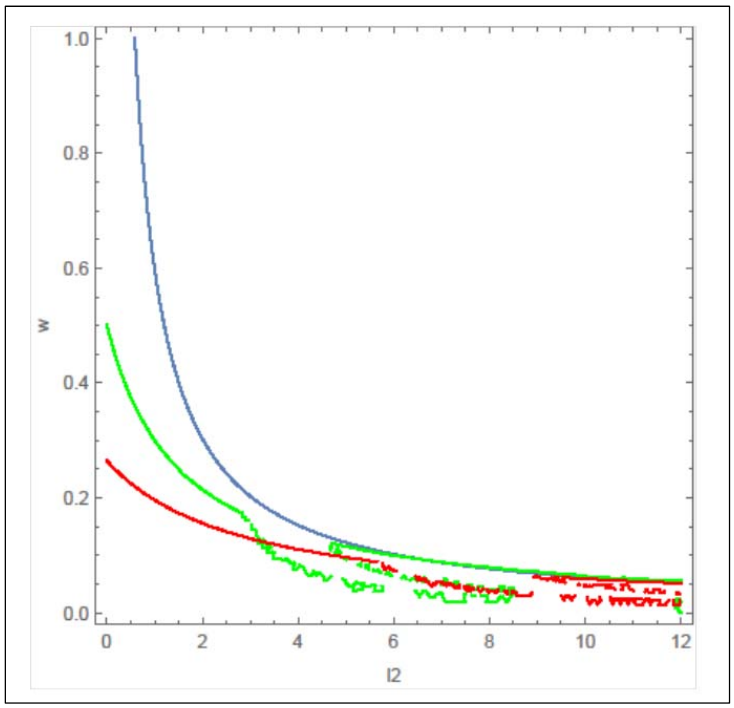


График 43. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$ - детализированный вид. Зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$, красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$. Использован третий корень (Root-3).

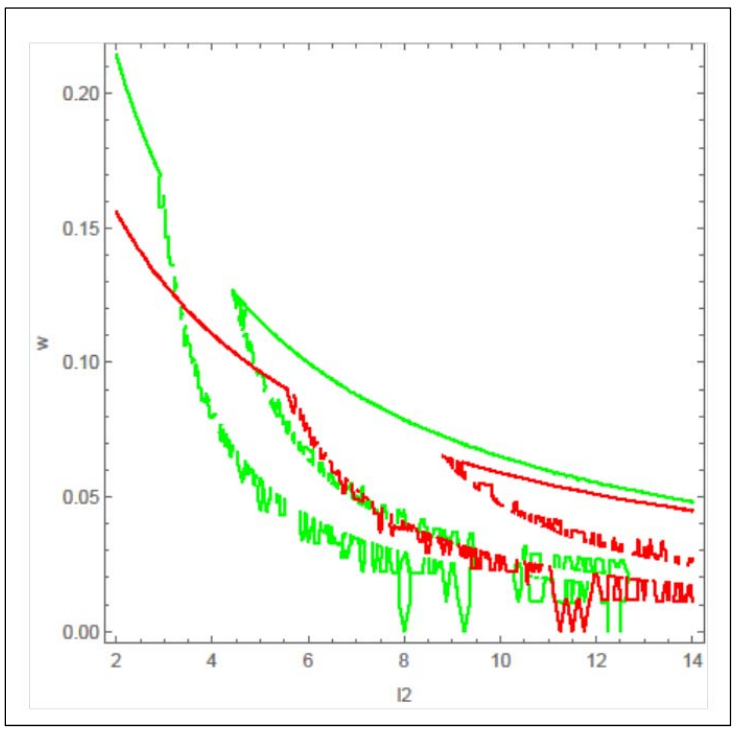


График 44. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$ - детализированный вид. Зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$. Использован третий корень (Root-3).

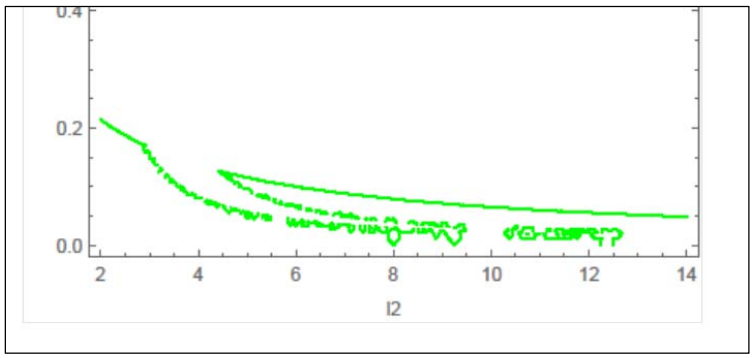


График 45. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$ - детализированный вид. Красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$. Использован третий корень (Root-3).

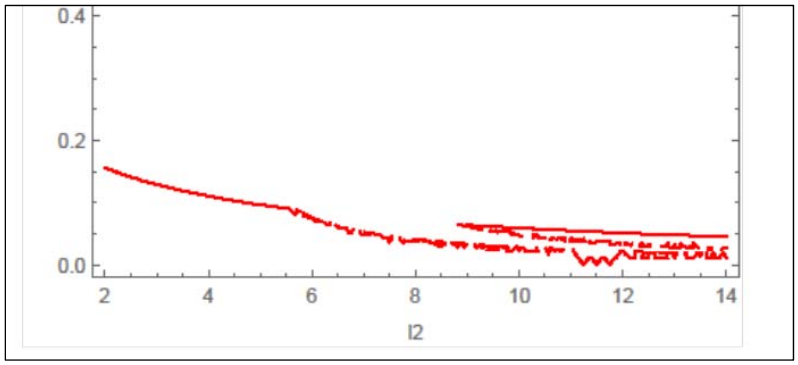


График 46. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_2 = 1$. Использован третий корень (Root-3).

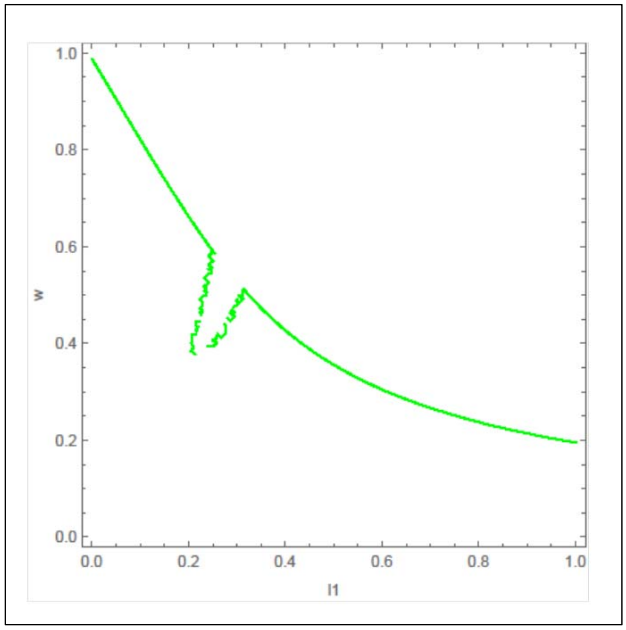


График 47. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Розовый цвет соответствует выбору первого корня.
Использован первый корень (Root-1).

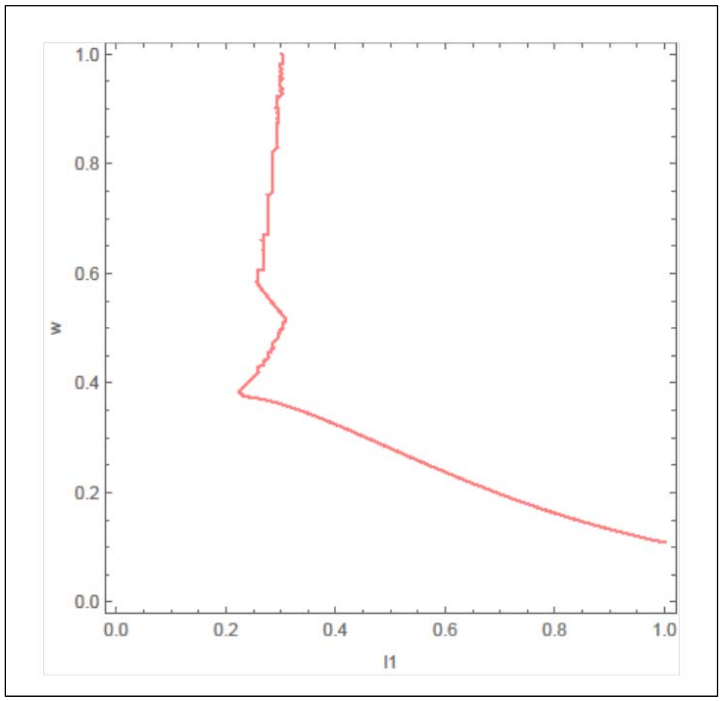


График 48. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_2 = 1$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует выбору первого корня.

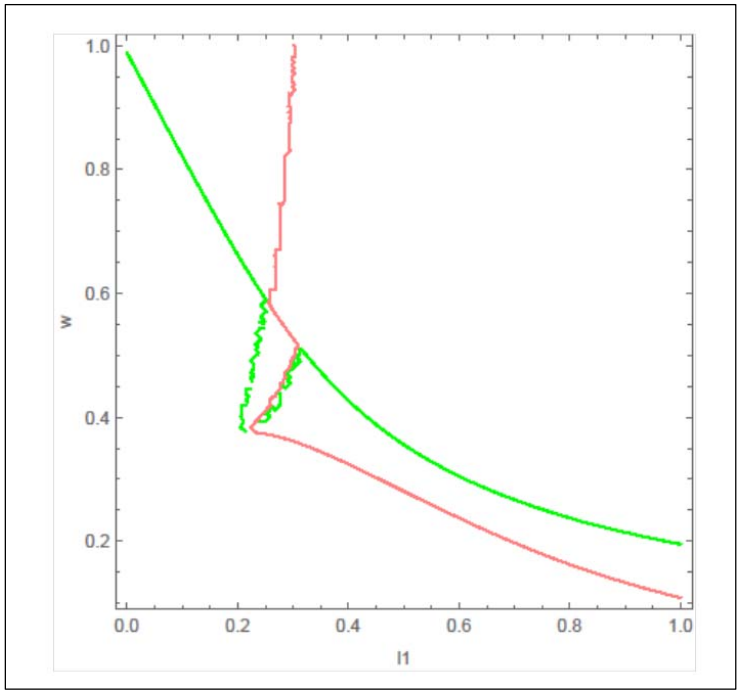


График 49. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_2 = 1$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует выбору первого корня.

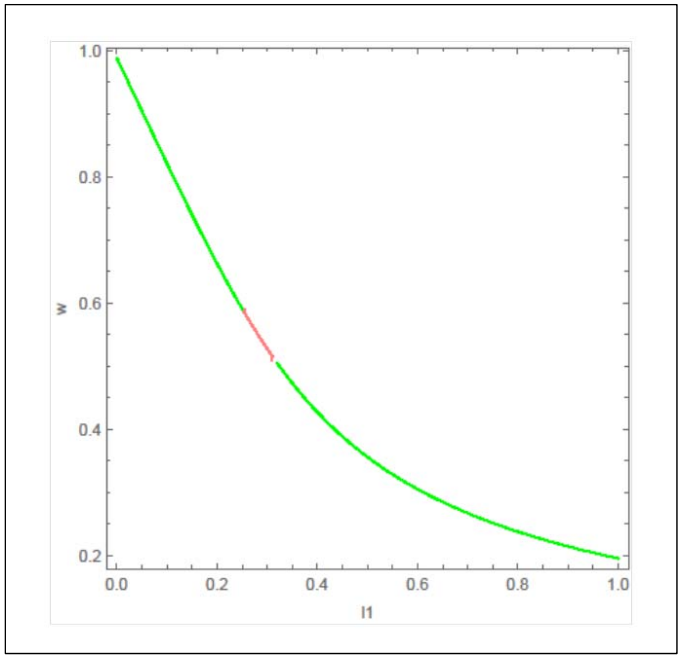


График 50. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору третьего корня.

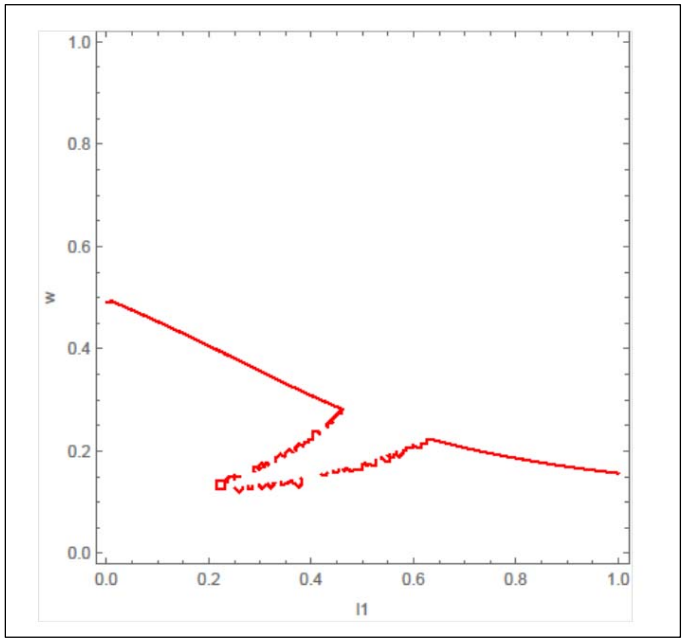


График 51. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Розовый цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору первого корня.

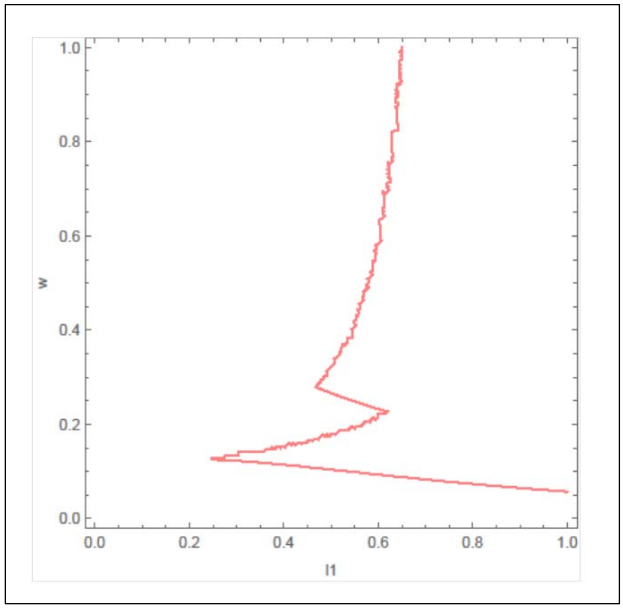


График 52. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору первого корня.

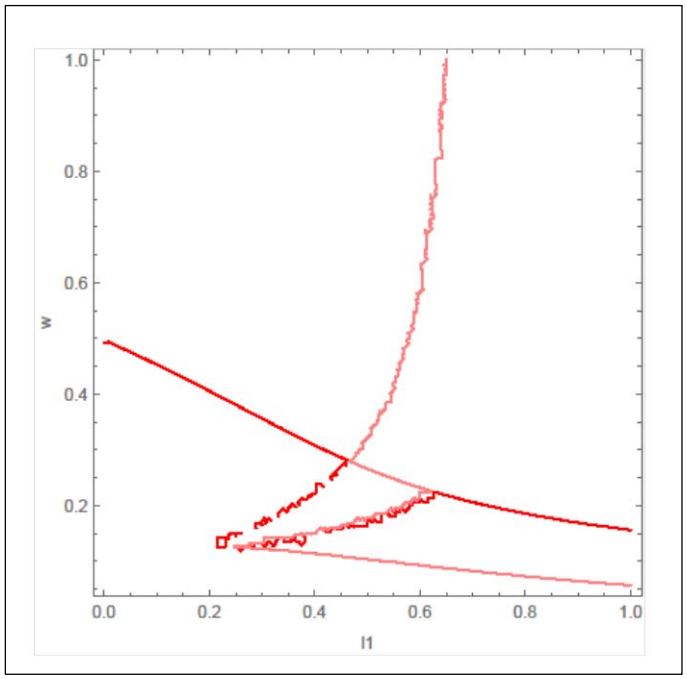


График 53. Кривая максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ на плоскости $(l_1; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_2 = 2$ и выбору первого корня.

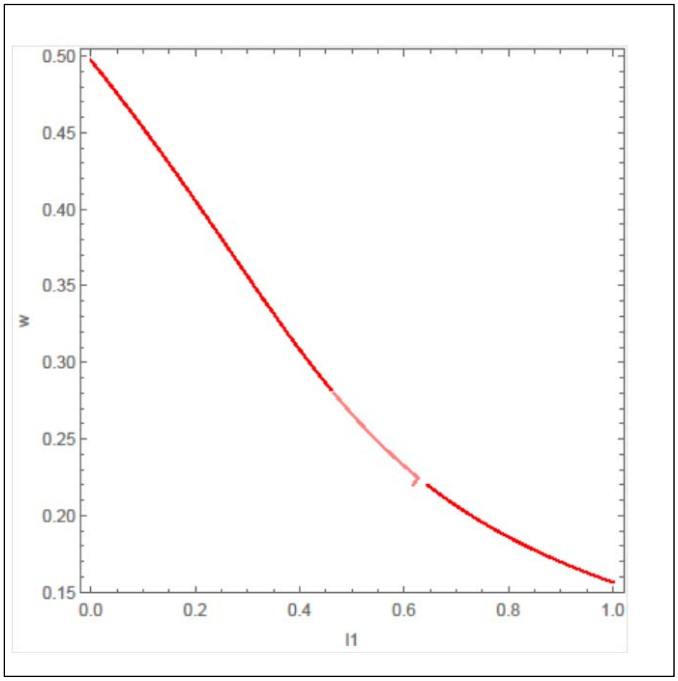


График 54. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору третьего корня.

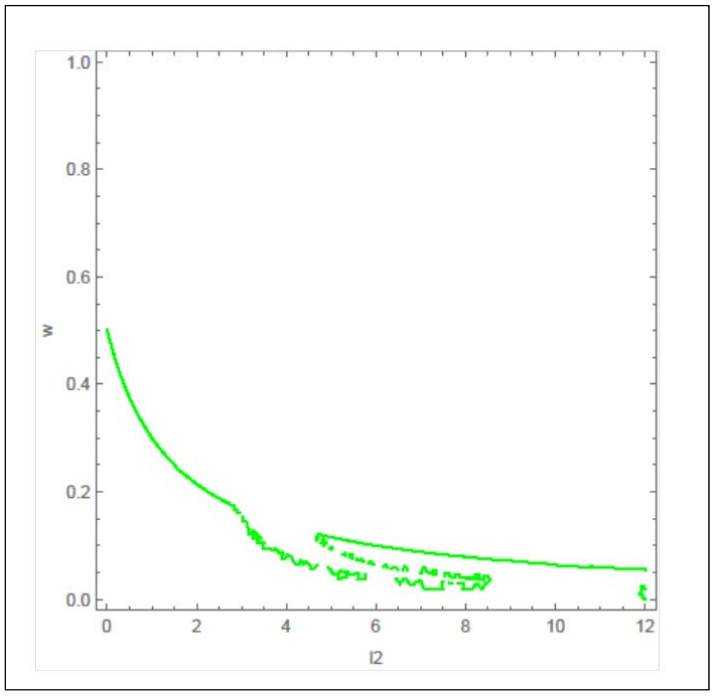


График 55. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору первого корня.

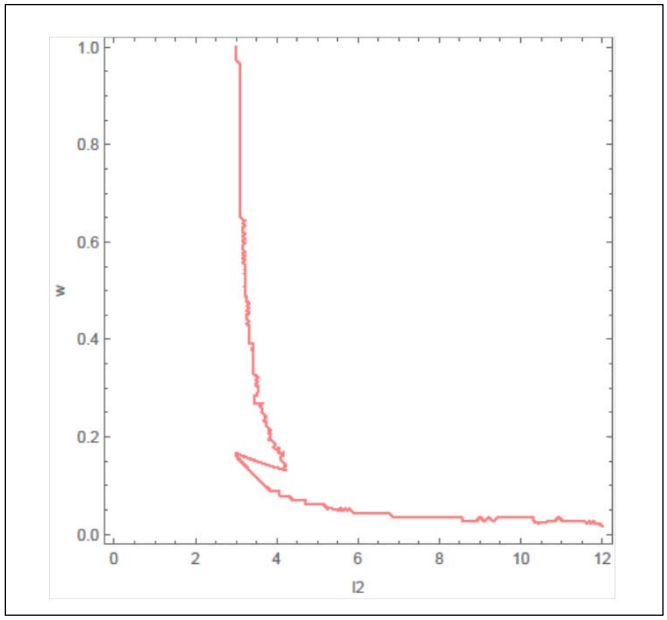


График 56. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору первого корня.

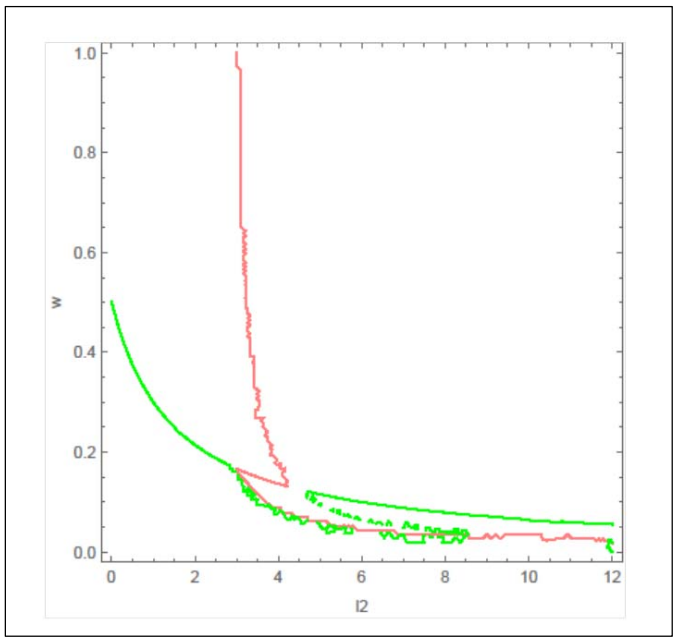


График 57. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Зелёный цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 1$ и выбору первого корня.

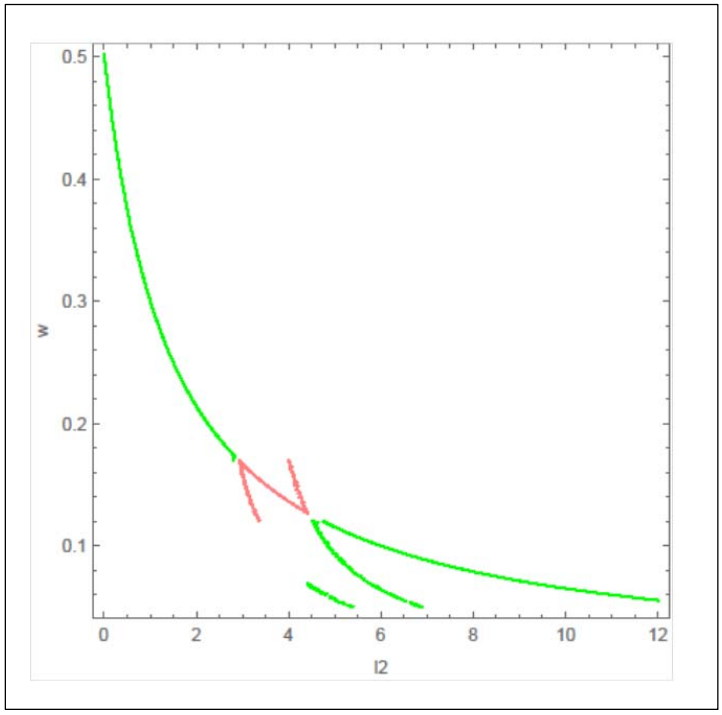


График 58. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору третьего корня.

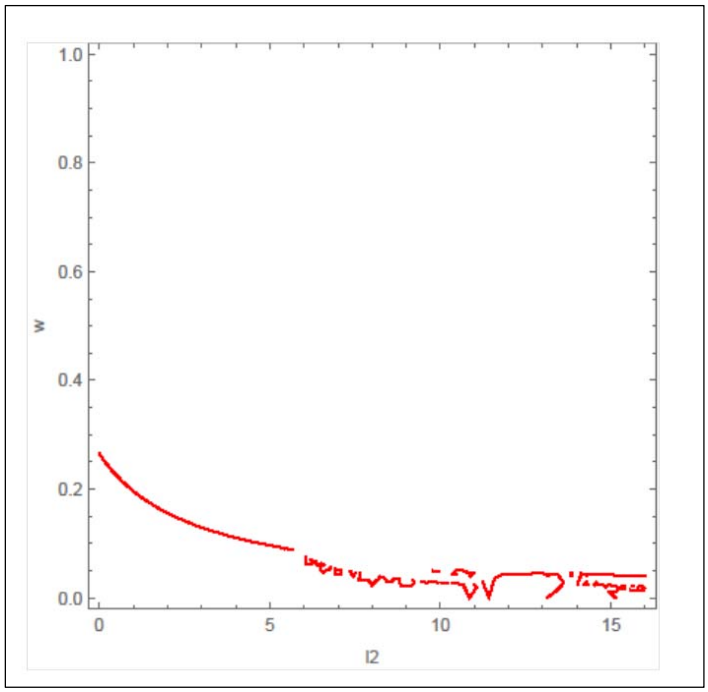


График 59. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору первого корня.

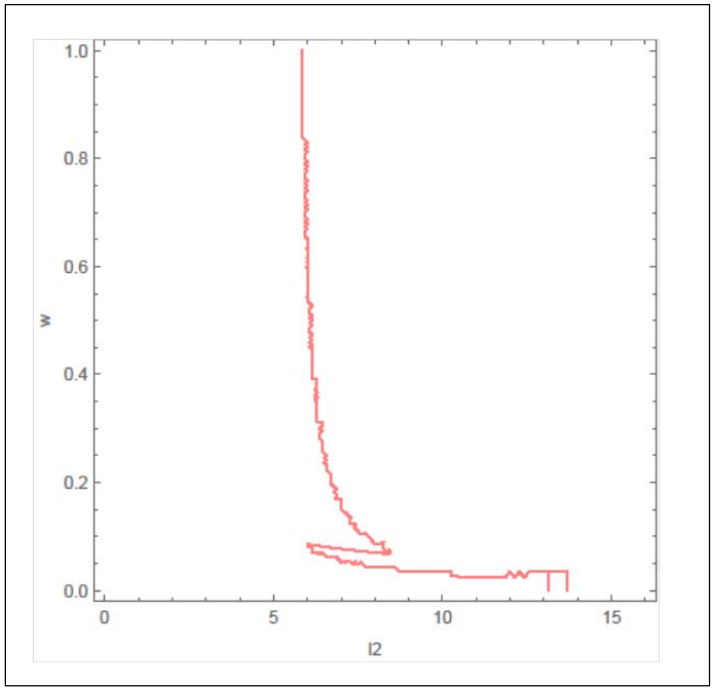


График 60. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору первого корня.

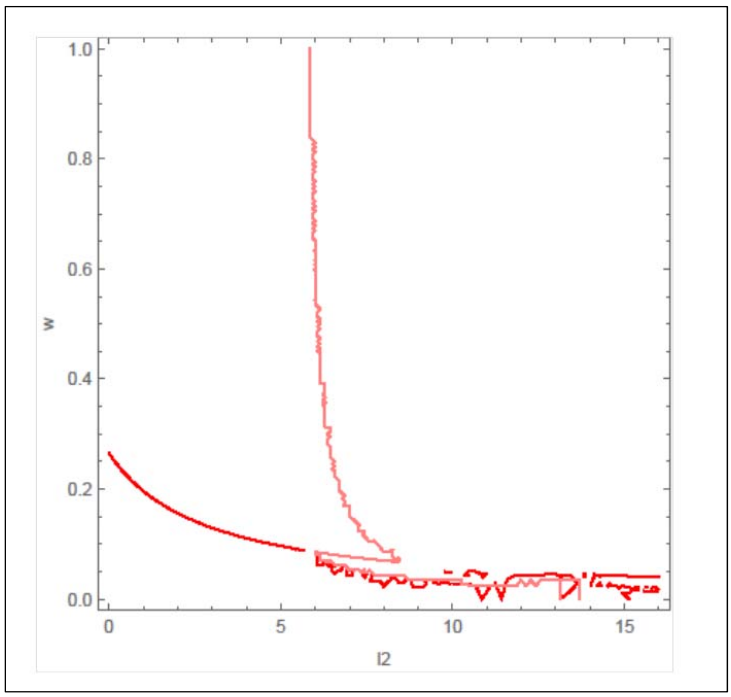


График 61. Кривая максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ на плоскости $(l_2; w)$. Красный цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору третьего корня. Розовый цвет соответствует значению $l_1 = 2$ и выбору первого корня.

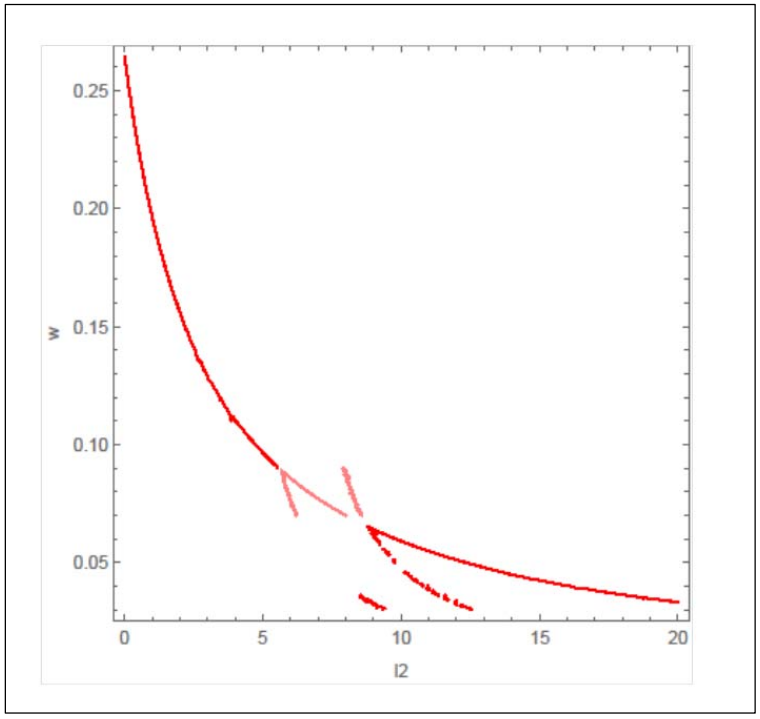


График 62. График линии максимальной прибыли в единицах продукции первого и второго подразделения, получаемых решением системы уравнений $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ и $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ в осях $(Ln(w); Ln(l_1))$. Красные точки графика соответствуют выбору первого корня (Root-1) характеристического уравнения (кубического многочлена), синие точаки соответствуют выбору третьего корня этого уравнения (Root-3).

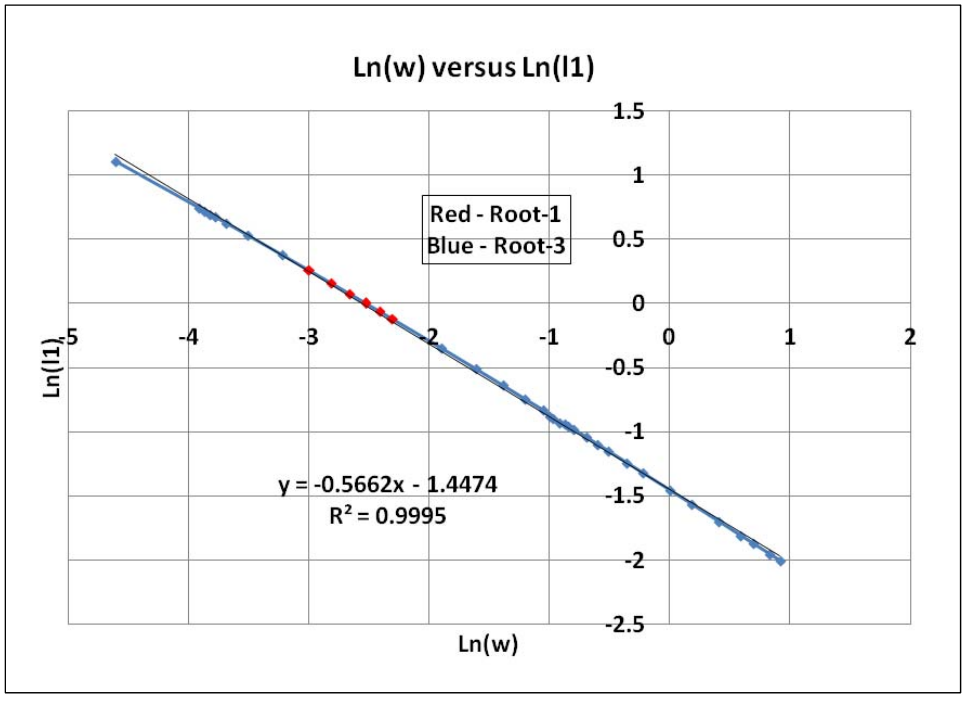


График 63. График линии максимальной прибыли в единицах продукции первого и второго подразделения, получаемых решением системы уравнений $\frac{\partial \pi_1}{\partial l_1} = 0$ и $\frac{\partial \pi_2}{\partial l_2} = 0$ в осях $\left(Ln(w); Ln(l_2)\right)$. Красные точки графика соответствуют выбору первого корня (Root-1) характеристического уравнения (кубического многочлена), синие точаки соответствуют выбору третьего корня этого уравнения (Root-3).

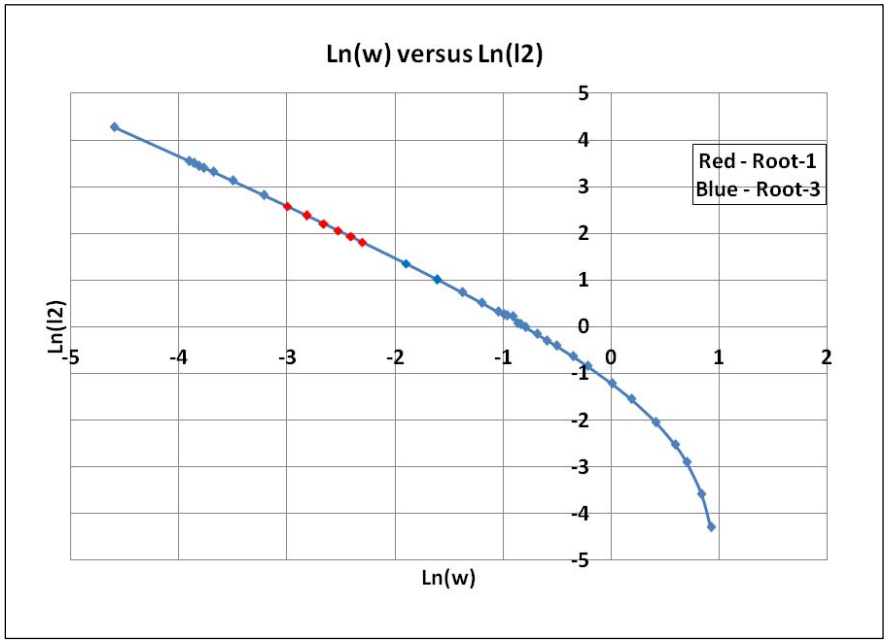


График 64. График $l_1(w)$

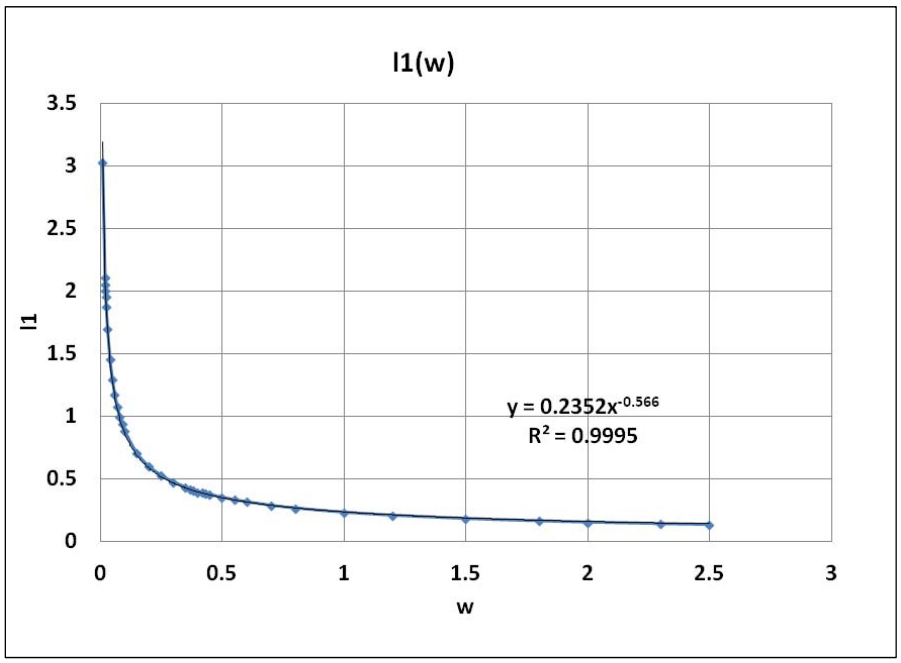


График 65. График $l_2(w)$

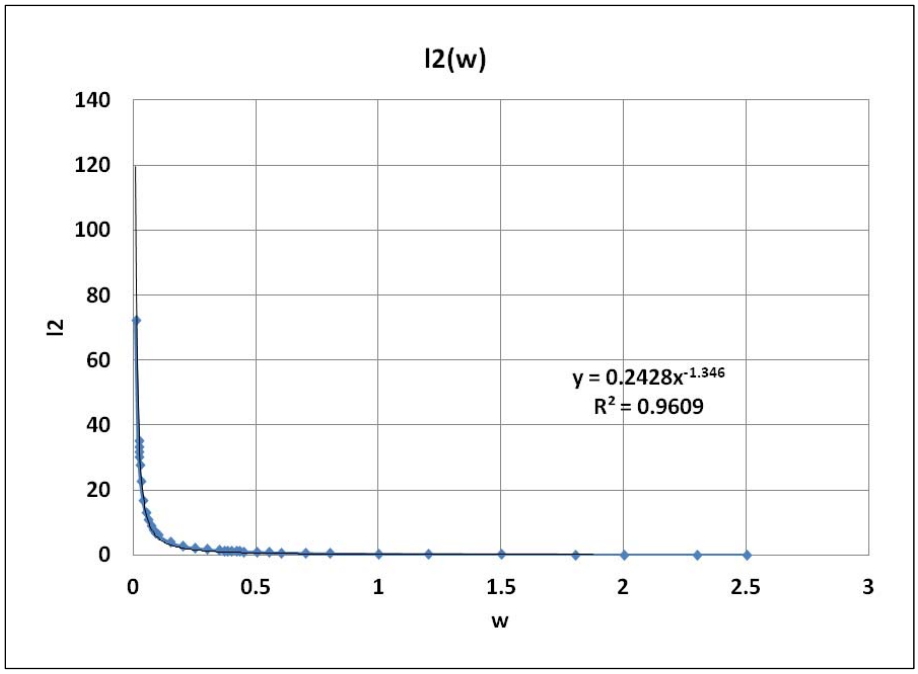


График 66. График $l_2(l_1)$

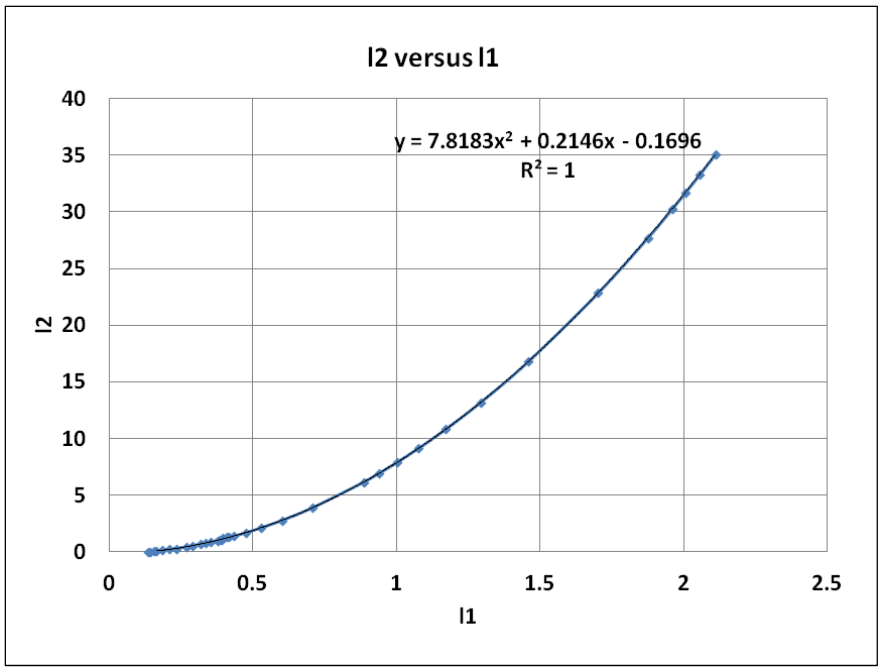


График 67. График $l_2(l_1)$

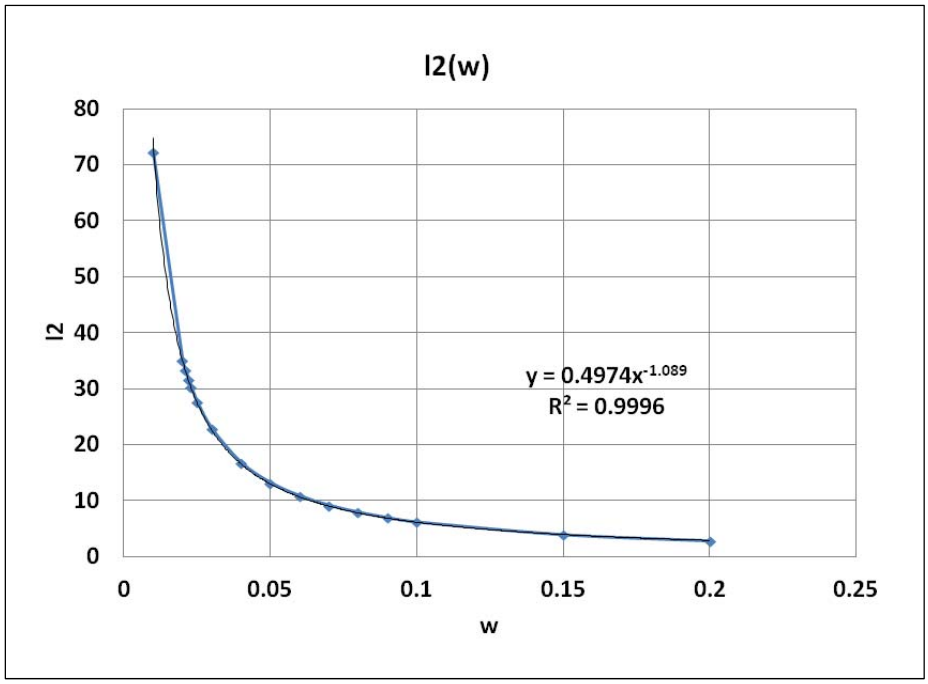
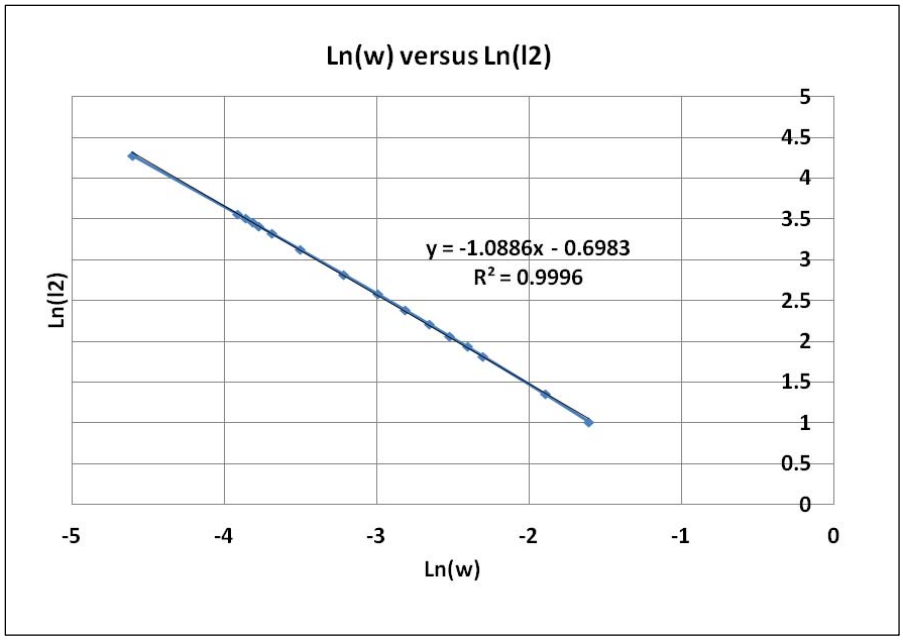


График 68. График $Ln(l_2)$ как функция от $Ln(w)$.



16. Заключение.

Мы рассмотрели две системы капиталистических цен, используемые в ТТС для моделирования равновесных цен при капитализме – система цен равной рентабельности и система цен производства. Выбрав в качестве единиц товара (годовые) выпуски продукции в первом и втором подразделениях мы исследуем влияние затрат живого труда в этих подразделениях на цены, добавленные стоимости, прибыли и нормы прибыли. Мы исследуем также влияние ставки реальной оплаты труда и денежной оплаты труда на величину добавленной стоимости, прибыль в единице продукции, на норму прибыли и цены.

Решение математических уравнений системы цен показывает, что часть утверждений ТТС не выполняются. Возможны положительные прибыли и добавленные стоимости без применения живого труда в производстве. Эти общие математические выводы противоречат фундаментальным Утверждениям 3, 4 и 8 ТТС, приведённым во Введении этой статьи. Более того, добавленные стоимости и цены товаров зависят от ставки оплаты труда, что противоречит Утверждению 5 ТТС.

Приведённые во Введении Утверждения ТТС выполняются лишь для докапиталистической экономики, в которой капиталистическая прибыль равна нулю и вся добавленная стоимость совпадает с зарплатой производителя.

Математические решения уравнений противоречат основному утверждению стандартной версии ТТС, будто прибыль это часть живого труда рабочих, выраженная в денежной форме. Расчёты показывают, что для цен равной рентабельности и цен производства - прибыль может быть больше нуля, даже когда живой труд не используется вообще, – это доказывается математически. Значит, капиталистическая прибыль может существовать и без эксплуатации рабочих.

Следовательно, прибыль нельзя трактовать только как часть живого труда работников (прибавочный труд) как это делает ТТС Маркса, выводя происхождение прибыли из эксплуатации рабочих.

С математической точки зрения, прибыли положительны, если собственное число Фробениуса социо-технической матрицы меньше единицы. Значение этого числа Фробениуса зависит не только от затрат живого труда, но от всех элементов социо-технической матрицы. Уменьшение элементов этой матрицы (экономия на издержках производства) уменьшает число Фробениуса (вследствие теоремы о монотонности спектрального радиуса неотрицательной неразложимой матрицы) и увеличивает норму рентабельности (и прибыли).

Если правильное управление капиталистов позволяет уменьшать элементы социо-технической матрицы до такого уровня, что собственное число Фробениуса становится меньше единицы, то, вне зависимости от того, используется ли живой труд или нет, – норма прибыли, а значит, и сами прибыли будут положительными.

Полученные результаты ставят под сомнение основные выводы ТТС, касающиеся происхождения добавленной стоимости и прибыли. Странно было бы рассматривать прибыли как присвоение части живого труда работников, если из уравнений для капиталистических цен следует, что при отсутствии этого живого труда (например, в полностью автоматизированной экономике) прибыли могут быть положительными, как и добавленные стоимости.

Хотя фундаментальная теорема Маркса (прибыли положительны, если параметр эксплуатации больше нуля при не нулевых затратах живого труда) выполняется для обеих систем капиталистических цен, причина этого чисто математическая. Теорема эта выполняется лишь потому, что при вычислении параметра эксплуатации ТТС использует то определение стоимости товаров, которое сформулировано для докапиталистической экономики. ТТС рассчитывает стоимость единицы предметов потребления по алгоритму, который используется для докапиталистической стадии товарного производства, но

почему-то применяется для построения параметра эксплуатации в капиталистической экономике, что, вероятно, вряд ли правомерно делать с логической точки зрения.

Согласно утверждениям Маркса, «стоимость» - это историческая категория, и её определение поэтому должно зависеть от социального устройства общества для той товарной экономики, для которой мы хотим дать алгоритм вычисления стоимости товаров. Стоимости товаров при капитализме следует определять с учётом особой капиталистической формы общественного труда. То есть она по своему алгоритму расчёта она должна отличаться от алгоритма определения стоимости в докапиталистической экономике[40].

[40] Это одно из положений новой версии ТТС, согласно которой каждой стадии рыночной экономики соответствует свой особый способ определения стоимостей товаров и свой алгоритм расчёта этих стоимостей.

Приложение 1.

Графики для системы цен производства.

Приведённые ниже графики получены в результате численного решения уравнений для цен производства (19)-(21). Коды расчётов приведены в Program-4 (ставка реальной оплаты труда фиксирована) и в Program-4a (ставка оплаты выбирается так, чтобы параметр эксплуатации был равен нулю). Варьируя затраты живого труда $l_1; l_2$ находим численное решение системы уравнений и определяем прибыли, норму прибыли, добавленные стоимости и цены.

График 69. Зависимость цены выпуска первого подразделения от затрат живого труда в первом подразделении.

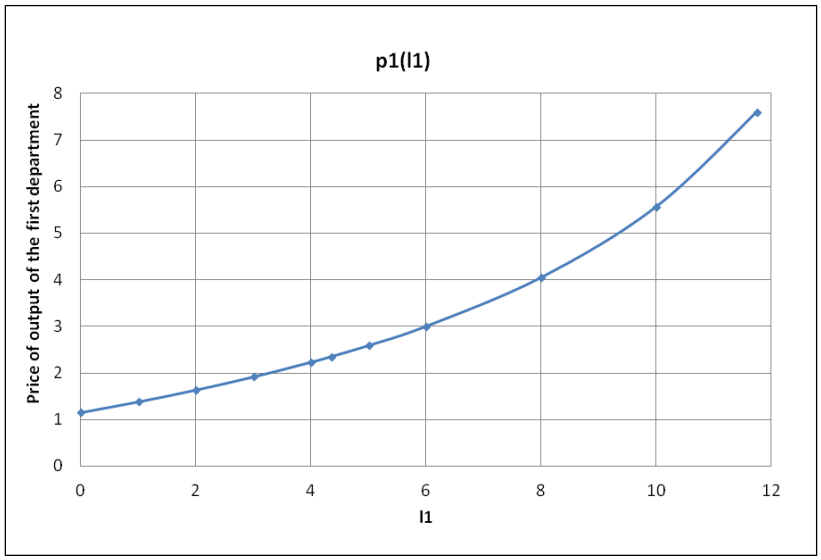


График 70. Зависимость цены выпуска второго подразделения от затрат живого труда в первом подразделении.

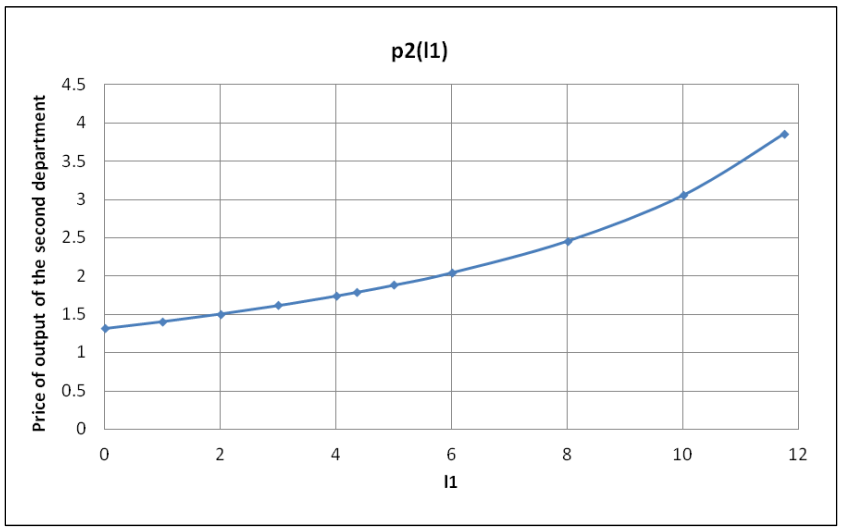


График 71. Зависимость цены выпуска первого подразделения от затрат живого труда во втором подразделении.

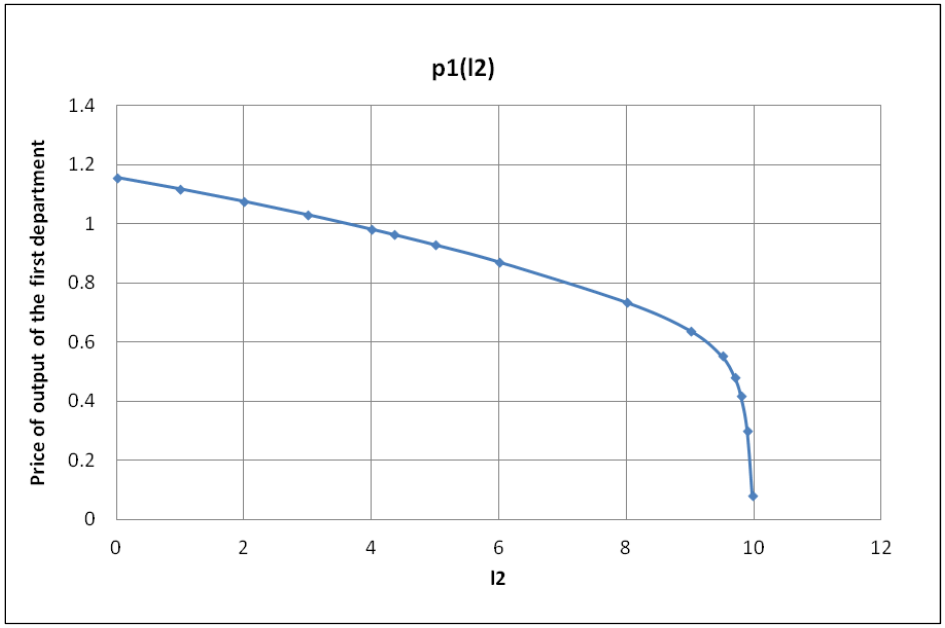


График 72. Зависимость цены выпуска второго подразделения от затрат живого труда во втором подразделении.

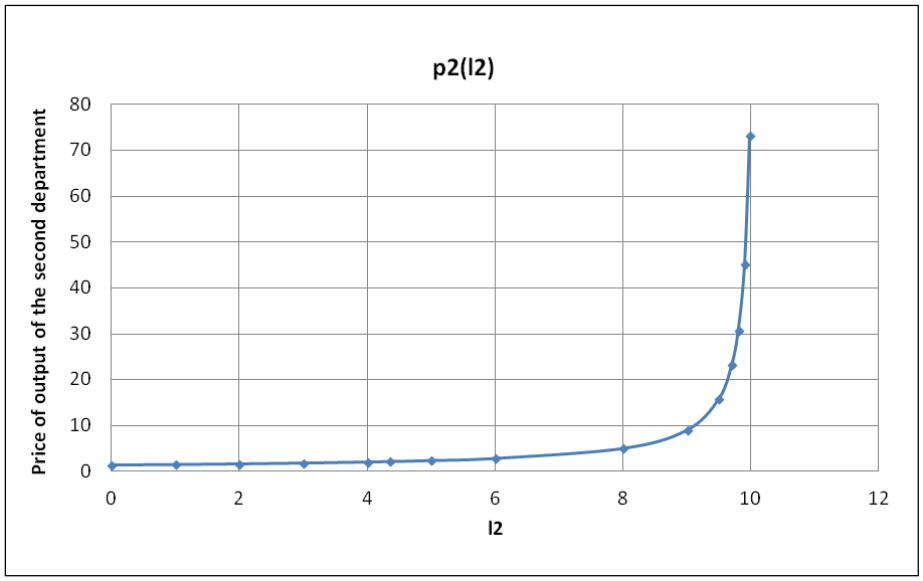


График 73. Зависимость нормы прибыли от затрат живого труда в первом подразделении.

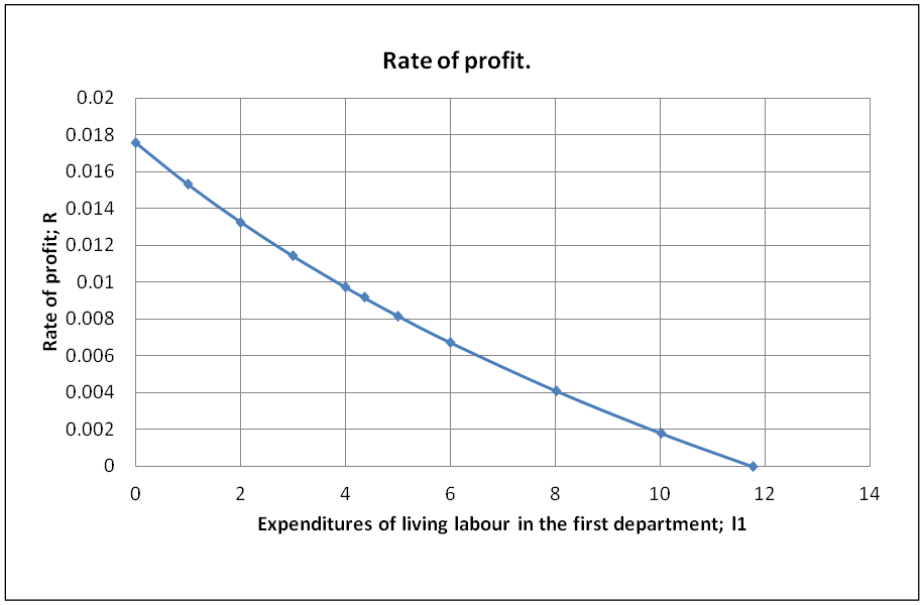


График 74. Зависимость нормы прибыли от затрат живого труда во втором подразделении.

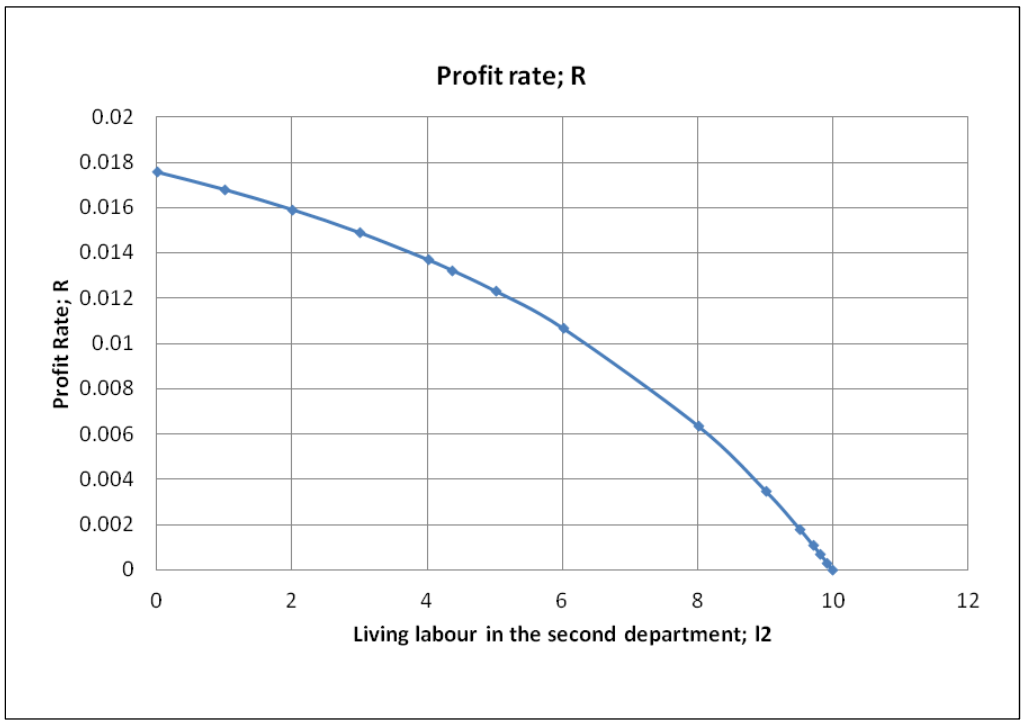


График 75. Зависимость прибыли первого подразделения от затрат труда в первом подразделении.

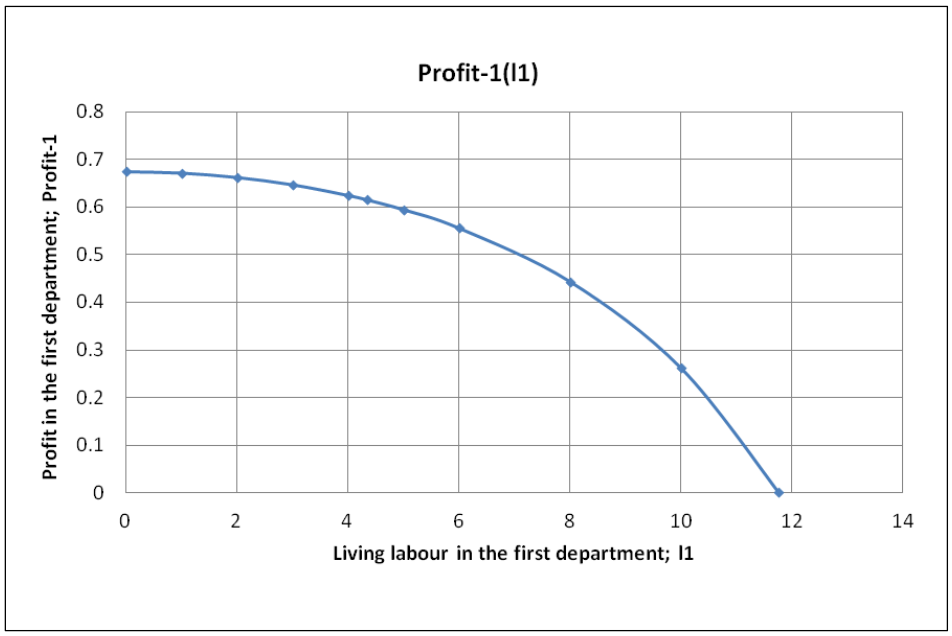


График 76. Зависимость прибыли второго подразделения от затрат труда в первом подразделении.

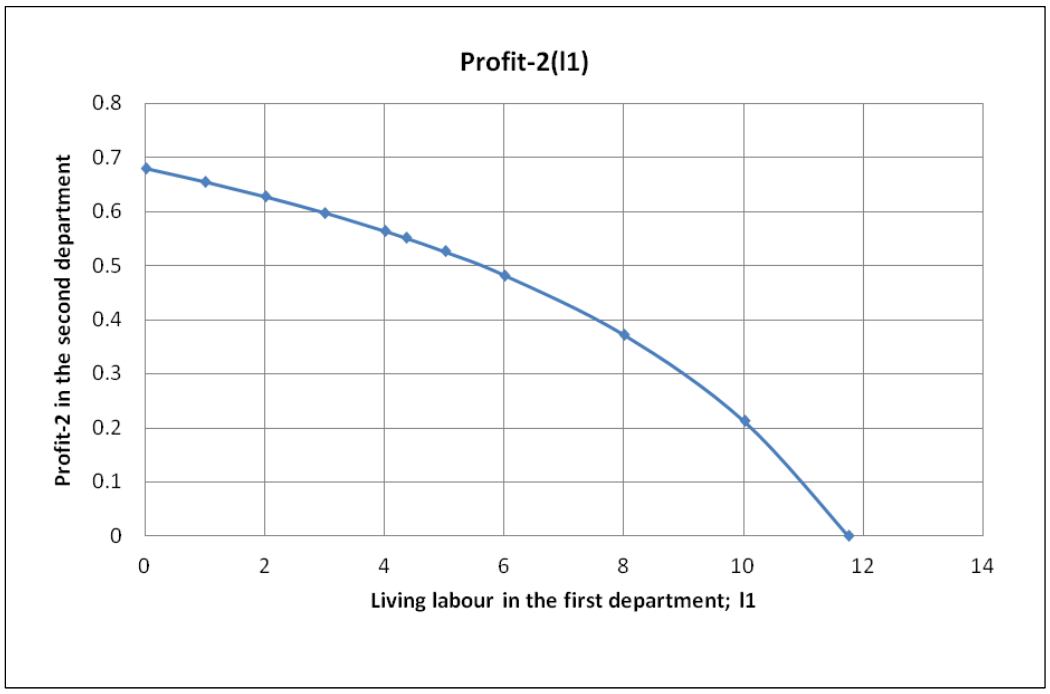


График 77. Зависимость добавленной стоимости в первом подразделении от затрат труда в первом подразделении.

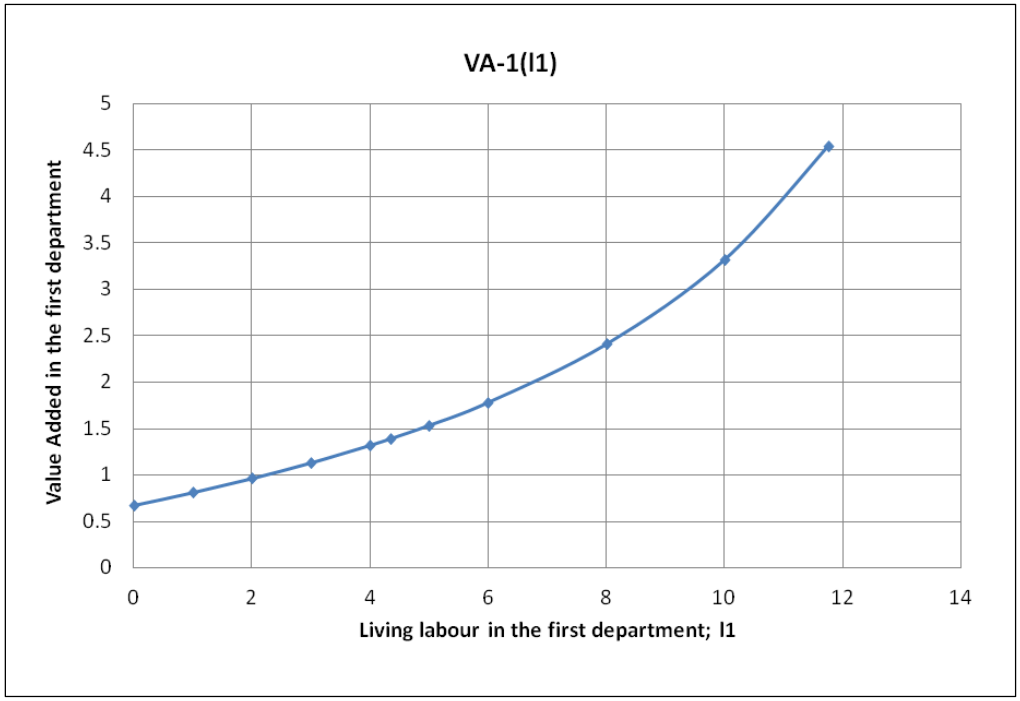


График 78. Зависимость добавленной стоимости во втором подразделении от затрат труда в первом подразделении.

График 79. Зависимость прибыли первого подразделения от затрат труда во втором подразделении.

График 80. Зависимость прибыли второго подразделения от затрат труда во втором подразделении.

График 81. Зависимость добавленной стоимости в первом подразделении от затрат труда во втором подразделении.

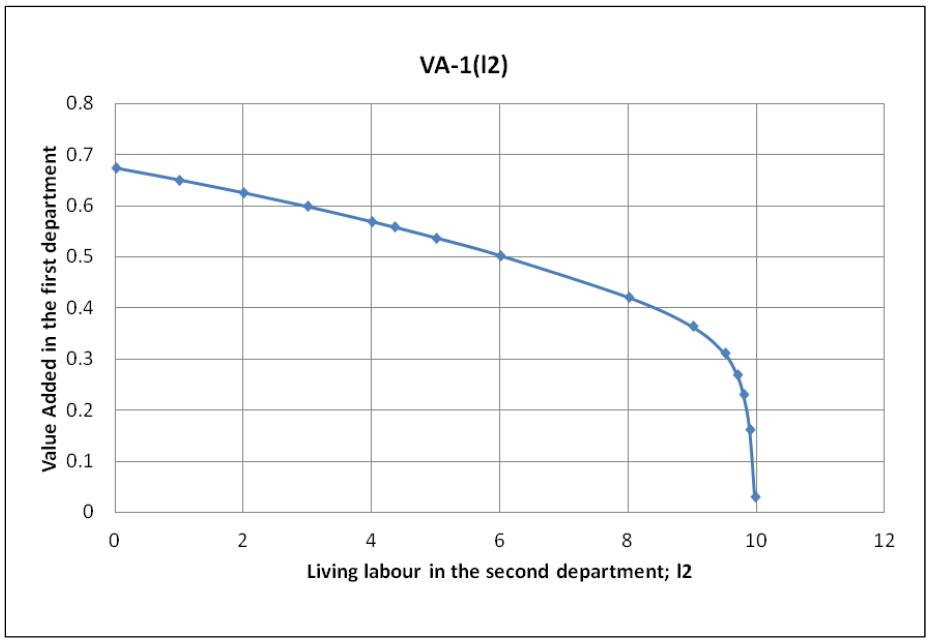


График 82. Зависимость добавленной стоимости во втором подразделении от затрат труда во втором подразделении.

График 83. Зависимость добавленной стоимости во втором подразделении от затрат труда во втором подразделении при малых затратах живого труда.

График 84. Зависимость прибыли в первом подразделении от затрат труда в первом подразделении если параметр эксплуатации равен нулю.

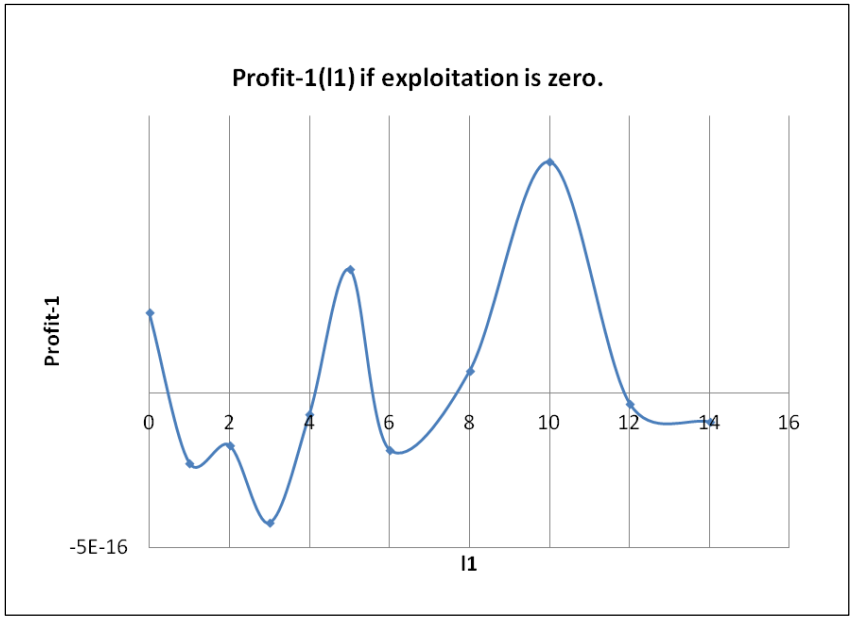


График 85. Зависимость прибыли во втором подразделении от затрат труда в первом подразделении если параметр эксплуатации равен нулю.

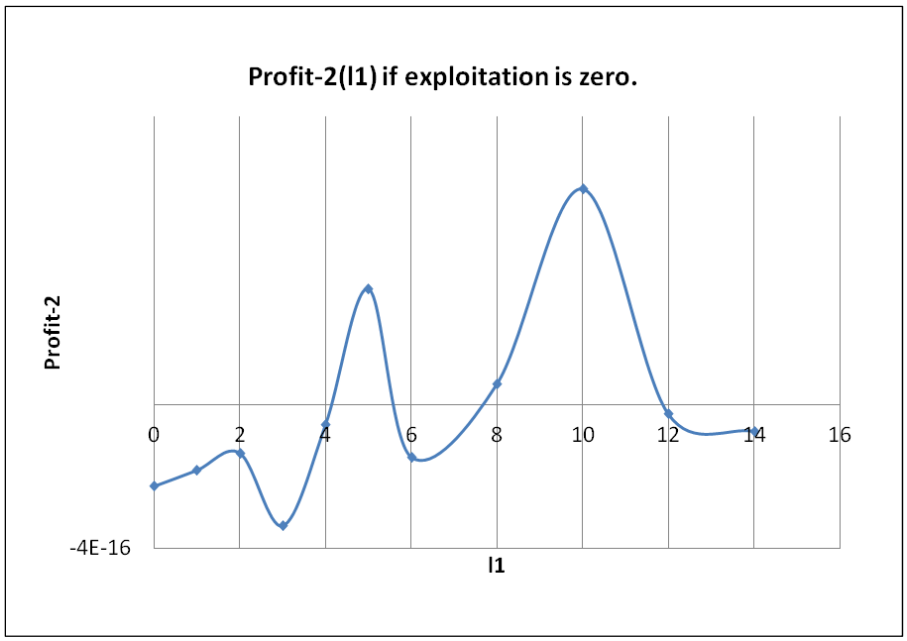


График 86. Зависимость прибыли в первом подразделении от затрат труда во втором подразделении если параметр эксплуатации равен нулю.

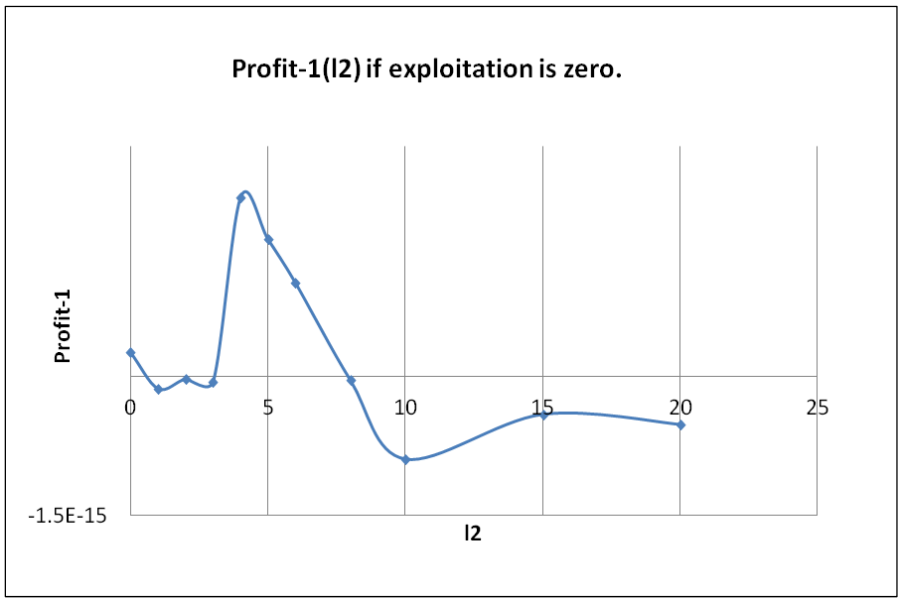
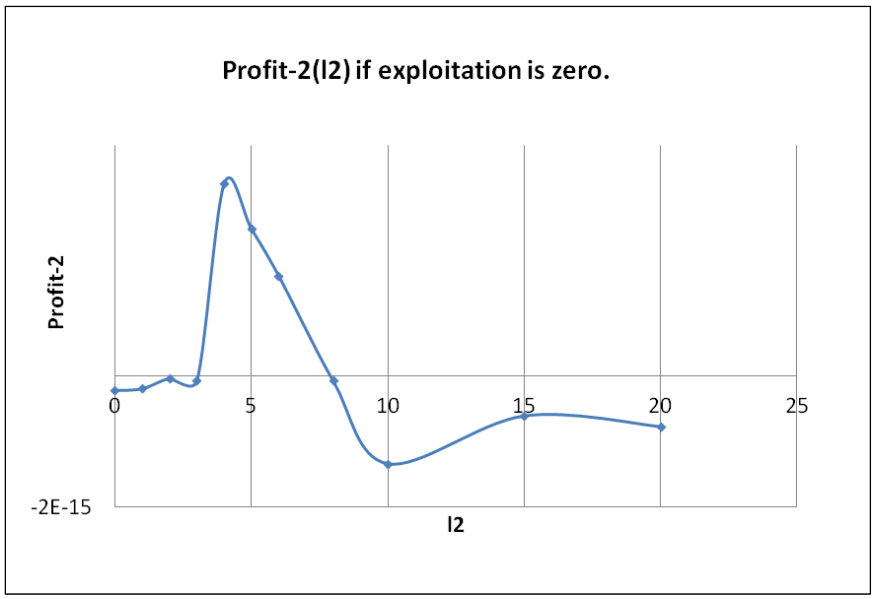


График 87. Зависимость прибыли во втором подразделении от затрат труда во втором подразделении если параметр эксплуатации равен нулю.



Приложение-2. Математическое дополнение.

А. Решение системы уравнений (13)-(15):

$$\begin{cases} (d_0 + p_1 \cdot a_0 + p_2 \cdot w \cdot l_0) \cdot (1+r) = p_0 = 1 & (13) \\ (d_1 + p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot w \cdot l_1) \cdot (1+r) = p_1 & (14) \\ (d_2 + p_1 \cdot a_2 + p_2 \cdot w \cdot l_2) \cdot (1+r) = p_2 & (15) \end{cases}$$

Программа-1. Вычисление собственного значения Фробениуса и собственного вектора Фробениуса матрицы A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} d0 & d1 & d2 \\ a0 & a1 & a2 \\ w \cdot l0 & w \cdot l1 & w \cdot l2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Программные коды программ для матрицы с символическими элементами (**Program-1**) и матрицы с числовыми элементами (**Program-2**) для Mathematica 10.8 приведены ниже. В программе (**Program-2**) все основные расчёты каждой неизвесной величины продублированы – расчёт выполнен для числовых значений и с подставлением числовых значений параметров в символические формулы, полученные в **Program-1**. Тем самым мы можем рассматривать **Program-2** как проверочный тест символических формул, полученных в программе Program-1.

Программы **Program-1a** (символические вычисления) и **Program-2a** (числовой пример) моделируют предельный случай экономики без применения трудового ресурса $l_0 = l_1 = l_2 = 0$. Опять норма прибыли и прибыли во всех трёх секторах получаются положительными, что противоречит основным постулатам ТТС.

Как уже было сказано в тексте статьи программа Mathematica 10.8 ставит на первое место (нумерует первым номером) собственное значение и собственный вектор Фробениуса для числовой матрицы в списке собственных значений и векторов матрицы. Для матрицы с символическими элементами это собственное значение и собственный вектор может стоять в разных местах списка. Для нашего числового примера искомый собственный вектор и собственное значение стоит в конце, номером третьим для большинства значений параметра l_1. Есть область значений l_1 при которых искомый вектор и число Фробениуса стоят на первом месте. Место расположения искомых значения и вектора Фробениуса в списке собственных значений и собственных векторов зависит от нумерации корней характеристического (кубического) уравнения. Более детальное рассмотрение этого пункта – обсуждается в главе 7.

При разработке программного кода были учтены следующие важные особенности работы программы Mathematica 10.8.

Условие нормировки собственных векторов, вычисленных для символической матрицы, используемое программой Mathematica 10.8, - это условие равенства единице третьей (последней) компоненты собственного вектора. Это условие нормировки не выполняется, если мы используем числовую матрицу. Результаты расчёта (24) и (25) приведены в тексте.

Программа Mathematica 10.8 находит только правые собственные вектора. Так как мы ищем левый собственный вектор Фробениуса, то пользуемся правилом, согласно которому правый собственный вектор транспонированной матрицы равен левому (искомому) собственному вектору исходной матрицы.

Каждая программа (**Program-1 and 2**) состоит из трёх частей: (1) вычисление основных величин (собственного значения Фробениуса, собственного вектора

Фробениуса, нормы прибыли, компонент вектора цен, прибылей в трёх секторах, и добавленных стоимостей в этих секторах), (2) вычисление стоимостей товаров и нормы реальной оплаты труда, при которой эксплуатация равна нулю, (3) проверка, что при этой норме эксплуатации (формула (27)) прибыли обращаются в ноль при любых значениях параметров (тем самым доказывается фундаментальная теорема Маркса).

В третьей части программы сначала находим формулы для значения ставки оплаты труда, при которой все прибыли обращаются в ноль. После этого упрощаем разность между этими ставками оплаты и формулой ставки оплаты, полученной из формулы (27) и эта разность, как показывают расчёты, тождественно обращается в ноль.

Программы **Program-3 и 4** строят графики для основных величин.

Program-5 решает численно систему уравнений для цен производства. Решение в символическом виде найти не удалось, вследствие недостаточных аппаратных средств использованного компьютера.

Program-5a решает численно систему уравнений для цен производства при условии, что параметр эксплуатации равен нулю. В этом случае прибыли обращаются в ноль. Положительной норме эксплуатации соответствуют положительные прибыли, отрицательной норме эксплуатации соответствуют отрицательные прибыли. Тем самым доказывается фундаментальная теорема Маркса для системы уравнений цен производства.

Program-6 доказывает фундаментальную теорему Маркса. Рассматриваются уравнения при нулевой норме прибыли $r = 0$. В этом случае обе системы цен (равной рентабельности и цены производства) сводятся к одной и той же системе уравнений. Программа доказывает, что решение этой системы относительно искомых цен и ставки оплаты труда даёт выражение для ставки оплаты труда, которое удовлетворяет условию отсутствия эксплуатации (27) при стоимости (34).

Program-7 содержит примеры нумерации корней полиномов, в зависимости от типа корня (целое число, вещественное или комплексное).

Для использования программного кода достаточно скопировать его и вставить в окно браузера программы Mathematica 10.8 (версия 10.8 или выше). Запуск программ производится комбинацией клавиш Shift + Enter.

Program-1. Symbolic Calculations.

```
Print["A1 matrix"]
A1={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{w l0,w l1,w l2}}
MatrixForm[%]
Print["eigenvalues A1"]
EVA=Eigenvalues[Transpose[A1]]
FullSimplify[%]
Print["lambda; Frobenius' eigenvalue A1"]
LAM=EVA[[3]]
Print["list: eigenvectors A1"]
EVE=Eigenvectors[Transpose[A1]]
FullSimplify[%]
Print["Frobenius' eigenvector A1"]
EVEF=EVE[[3]]
Print["Frobenius' eigenvector A1; first componenet"]
EVEF0=EVEF[[1]]
Print["Frobenius eigenvector A1 second componenet"]
EVEF1=EVEF[[2]]
Print["Frobenius eigenvector A1 third componenet"]
EVEF2=EVEF[[3]]
Print["Frobenius Price Vector pc0"]
pc0=EVEF0/EVEF0
Print["Price Price Vector pc1"]
pc1=EVEF1/EVEF0
FullSimplify[%]
Print["Price Price Vector pc2"]
pc2=EVEF2/EVEF0
FullSimplify[%]
Print["Profit rate r"]
r=1/LAM-1
FullSimplify[%]
Print["Profit-0"]
PROFIT0=(r/(1+r)) pc0
FullSimplify[%]
Print["Profit-1"]
PROFIT1=(r/(1+r)) pc1
FullSimplify[%]
Print["Profit-2"]
PROFIT2=(r/(1+r)) pc2
FullSimplify[%]
Print["Value Added-0"]
VA0=PROFIT0+w l0 pc2
FullSimplify[%]
Print["Value Added-1"]
VA1=PROFIT1+w l1 pc2
FullSimplify[%]
Print["Value Added-2"]
VA2=PROFIT2+w l2 pc2
FullSimplify[%]

Print["Calculation of values in SV of LTV"]
Print["A matrix"]
A={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{0,0,0}}
Print["C0 matrix"]
C0=Inverse[IdentityMatrix[3]-A]
MatrixForm[%]
Print["l vector of durect labour expenditures"]
```

```
l={l0,l1,l2}
Print["L vector of embodied labour"]
L=Transpose[C0].l
Print["L0"]
L0=L[[1]]
FullSimplify[%]
Print["L1"]
L1=L[[2]]
FullSimplify[%]
Print["L2"]
L2=L[[3]]
FullSimplify[%]
Print["w1 for e=0"]
w1=1/L2
Print["Verification that all profits equal to zero for w satisfying condition e=0 w*L2=1"]
Print["Profit-0 as function of w is equal to zero"]
Solve[1-Root[-a2 d1 l0 wa+a1 d2 l0 wa+a2 d0 l1 wa-a0 d2 l1 wa-a1 d0 l2 wa+a0 d1 l2 wa+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wa-a2 l1 wa+a1 l2 wa+d0 l2 wa) #1+(-a1-d0-l2 wa) #1^2+#1^3&,3]==0,wa]
Print["Profit-1 as function of w is equal to zero"]
Solve[1/(-((1-(a2 l1+l2) wb+a1 (-1+l2 w0))/((d1+d2 l1 wb-d1 l2 wb) (-1+Root[-a2 d1 l0 wb+a1 d2 l0 wb+a2 d0 l1 wb-a0 d2 l1 wb-a1 d0 l2 wb+a0 d1 l2 wb+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wb-a2 l1 wb+a1 l2 wb+d0 l2 wb) #1+(-a1-d0-l2 wb) #1^2+#1^3&,3])))+1/d1 (-1+(l1 wb (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 wb-d1 l2 wb)))/((d1+d2 l1 wb-d1 l2 wb) (d2 l1 wb-d1 l2 wb+d1 Root[-a2 d1 l0 wb+a1 d2 l0 wb+a2 d0 l1 wb-a0 d2 l1 wb-a1 d0 l2 wb+a0 d1 l2 wb+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wb-a2 l1 wb+a1 l2 wb+d0 l2 wb) #1+(-a1-d0-l2 wb) #1^2+#1^3&,3]))))==0,wb]
Print["Profit-2 as function of w is equal to zero"]
Solve[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) wc)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 wc+a1 d2 l0 wc+a2 d0 l1 wc-a0 d2 l1 wc-a1 d0 l2 wc+a0 d1 l2 wc+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wc-a2 l1 wc+a1 l2 wc+d0 l2 wc) #1+(-a1-d0-l2 wc) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 wc-d1 l2 wc)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 wc+a1 d2 l0 wc+a2 d0 l1 wc-a0 d2 l1 wc-a1 d0 l2 wc+a0 d1 l2 wc+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wc-a2 l1 wc+a1 l2 wc+d0 l2 wc) #1+(-a1-d0-l2 wc) #1^2+#1^3&,3])))==0,wc]
FullSimplify[%]
Print["w1 if e=0 from equation w1*L2=1"]
w1=1/(((a2 d1+d2-a1 d2) l0)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+((a2-a2 d0+a0 d2) l1)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+l2)
Print["wa1 from equation Profit-0 as function of w equals to zero"]
wa1=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0 d1 l2)
Print["wb1 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb1=(d1 (d1 l0-d0 l1))/(l1 (d2 l1-d1 l2))
Print["wb2 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb2=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
Print["wb3 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb3=d1/(-d2 l1+d1 l2)
Print["wc1 from equation Profit-2 as function of w equals to zero"]
wc1=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0 d1 l2)
Print["w0-wa1"]
w1-wa1
FullSimplify[%]
Print["w0-wb1"]
w1-wb1
FullSimplify[%]
Print["w0-wb2"]
```

w1-wb2
FullSimplify[%]
Print["w0-wb3"]
w1-wb3
FullSimplify[%]
Print["w0-wc1"]
w1-wc1
FullSimplify[%]

Program-1a. Symbolic Calculations if direct labour expenditures equal to zero.

```
Print["A1 matrix"]
A1={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{0,0,0}}
MatrixForm[%]
Print["eigenvalues A1"]
EVA=Eigenvalues[Transpose[A1]]
FullSimplify[%]
Print["lambda; Frobenius' eigenvalue A1"]
LAM=EVA[[3]]
Print["list: eigenvectors A1"]
EVE=Eigenvectors[Transpose[A1]]
FullSimplify[%]
Print["Frobenius' eigenvector A1"]
EVEF=EVE[[3]]
Print["Frobenius' eigenvector A1; first componenet"]
EVEF0=EVEF[[1]]
Print["Frobenius eigenvector A1 second componenet"]
EVEF1=EVEF[[2]]
Print["Frobenius eigenvector A1 third componenet"]
EVEF2=EVEF[[3]]
Print["Frobenius Price Vector pc0"]
pc0=EVEF0/EVEF0
Print["Price Price Vector pc1"]
pc1=EVEF1/EVEF0
FullSimplify[%]
Print["Price Price Vector pc2"]
pc2=EVEF2/EVEF0
FullSimplify[%]
Print["Profit rate r"]
r=1/LAM-1
FullSimplify[%]
Print["Profit-0"]
PROFIT0=(r/(1+r)) pc0
FullSimplify[%]
Print["Profit-1"]
PROFIT1=(r/(1+r)) pc1
FullSimplify[%]
Print["Profit-2"]
PROFIT2=(r/(1+r)) pc2
FullSimplify[%]
Print["Value Added-0"]
VA0=PROFIT0
FullSimplify[%]
Print["Value Added-1"]
VA1=PROFIT1
FullSimplify[%]
Print["Value Added-2"]
VA2=PROFIT2
FullSimplify[%]
```

Program-2. Numerical Calculations.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0
w=0.1
ep=0
Print["A1 matrix"]
A1={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{w l0,w l1,w l2}}
MatrixForm[%]
Print["eigenvalues A1"]
EVA=Eigenvalues[Transpose[A1]]
Print["lambda; Frobenius' eigenvalue A1"]
LAM=EVA[[1]]
Print["lambda; Frobenius' eigenvalue A1 - third eigenvalue in Program-1"]
Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]
Print["list: eigenvectors A1"]
EVE=Eigenvectors[Transpose[A1]]
Print["Frobenius' eigenvector A1 - first eigenvector because matrix A1 has numerical elements"]
EVEF=EVE[[1]]
Print["Frobenius' eigenvector A1 - third eigenvector in Program-1 because matrix A1 has symbolic elements"]
{-(1/d2)(l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])+(a2 (-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(d2 (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),-((-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),1}
Print["Frobenius' eigenvector A1; first componenet numerical matrix"]
EVEF0=EVEF[[1]]
Print["Frobenius' eigenvector A1; first component if the symbolic matrix is used"]
EF0=-(1/d2)(l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])+(a2 (-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(d2 (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
Print["Frobenius eigenvector A1 second componenet"]
EVEF1=EVEF[[2]]
Print["Frobenius' eigenvector A1; second component if the symbolic matrix is used"]
EF1=-((-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])/(a2 d1-a1 d2+d2
```

```
Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
Print["Frobenius eigenvector A1 third componenet"]
EVEF2=EVEF[[3]]
Print["Frobenius' eigenvector A1; third component if the symbolic matrix is used"]
EF2=1
Print["Frobenius Price Vector pc0"]
pc0=EVEF0/EVEF0
Print["Frobenius Price Vector pc0 via simbolic calculations"]
EF0/EF0
Print["Price Price Vector pc1"]
pc1=EVEF1/EVEF0
Print["Frobenius Price Vector pc1 via simbolic calculations"]
EF1/EF0
Print["Price Price Vector pc2"]
pc2=EVEF2/EVEF0
Print["Frobenius Price Vector pc0 via simbolic calculations"]
EF2/EF0
Print["Profit rate r"]
r=1/LAM-1
Print["Profit rate r via simbolic calculations in Program-1"]
-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-
a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]
Print["Profit-0"]
PROFIT0=(r/(1+r)) pc0
Print["Profit-0 via simbolic calculations in Program-1"]
1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]
Print["Profit-1"]
PROFIT1=(r/(1+r)) pc1
Print["Profit-1 via simbolic calculations in Program-1"]
1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))
Print["Profit-2"]
PROFIT2=(r/(1+r)) pc2
Print["Profit-2 via simbolic calculations in Program-1"]
1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2
d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2
w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))
Print["Value Added-0"]
VA0=PROFIT0+w l0 pc2
Print["Value Added-0 via simbolic calculations in Program-1"]
1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
```

```
Print["Value Added-1"]
VA1=PROFIT1+w l1 pc2
Print["Value Added-1 via simbolic calculations in Program-1"]
((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2
d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2
w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2
d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2
w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])
Print["Value Added-2"]
VA2=PROFIT2+w l2 pc2
Print["Value Added-2 via simbolic calculations in Program-1"]
1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2
w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1
d2+d2 l2 w) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0
l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))

Print["Calculation of values in SV of LTV"]
Print["A matrix"]
A={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{0,0,0}}
Print["C0 matrix"]
C0=Inverse[IdentityMatrix[3]-A]
MatrixForm[%]
Print["l vector of durect labour expenditures"]
l={l0,l1,l2}
Print["L vector of embodied labour"]
L=Transpose[C0].l
Print["L0"]
L0=L[[1]]
FullSimplify[%]
Print["L1"]
L1=L[[2]]
FullSimplify[%]
Print["L2"]
L2=L[[3]]
FullSimplify[%]
Print["w1 for e=0"]
w1=1/L2
Print["Verification that all profits equal to zero for w satisfying condition e=0 w*L2=1"]
Print["Profit-0 as function of w is equal to zero; wa"]
Solve[1-Root[-a2 d1 l0 wa+a1 d2 l0 wa+a2 d0 l1 wa-a0 d2 l1 wa-a1 d0 l2 wa+a0 d1 l2 wa+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 wa-a2 l1 wa+a1 l2 wa+d0 l2 wa) #1+(-a1-d0-l2 wa) #1^2+#1^3&,3]==0,wa]
Print["wa if Profit-0 as function of w is equal to zero"]
wa1=N[%%,6]
Print["Profit-1 as function of w is equal to zero"]
Solve[1/(-((1-(a2 l1+l2) wb+a1 (-1+l2 w0))/((d1+d2 l1 wb-d1 l2 wb) (-1+Root[-a2 d1 l0 wb+a1 d2 l0
wb+a2 d0 l1 wb-a0 d2 l1 wb-a1 d0 l2 wb+a0 d1 l2 wb+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wb-a2 l1 wb+a1 l2 wb+d0 l2
wb) #1+(-a1-d0-l2 wb) #1^2+#1^3&,3])))+1/d1 (-1+(l1 wb (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 wb-d1 l2 wb)))/((d1+d2
l1 wb-d1 l2 wb) (d2 l1 wb-d1 l2 wb+d1 Root[-a2 d1 l0 wb+a1 d2 l0 wb+a2 d0 l1 wb-a0 d2 l1 wb-a1 d0
```

```
l2 wb+a0 d1 l2 wb+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wb-a2 l1 wb+a1 l2 wb+d0 l2 wb) #1+(-a1-d0-l2 wb)
#1^2+#1^3&,3])))==0,wb]
Print["Profit-2 as function of w is equal to zero"]
Solve[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) wc)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 wc+a1 d2 l0 wc+a2
d0 l1 wc-a0 d2 l1 wc-a1 d0 l2 wc+a0 d1 l2 wc+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 wc-a2 l1 wc+a1 l2 wc+d0 l2 wc) #1+(-
a1-d0-l2 wc) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 wc-d1 l2 wc)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1
d2+d2 Root[-a2 d1 l0 wc+a1 d2 l0 wc+a2 d0 l1 wc-a0 d2 l1 wc-a1 d0 l2 wc+a0 d1 l2 wc+(a1 d0-a0 d1-d2
l0 wc-a2 l1 wc+a1 l2 wc+d0 l2 wc) #1+(-a1-d0-l2 wc) #1^2+#1^3&,3])))==0,wc]
FullSimplify[%]
Print["w1 if e=0 from equation w1*L2=1"]
w1=1/(((a2 d1+d2-a1 d2) l0)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+((a2-a2 d0+a0 d2) l1)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+l2)
Print["wa1 from equation Profit-0 as function of w equals to zero"]
wa1=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0
d1 l2)
Print["wb1 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb1=(d1 (d1 l0-d0 l1))/(l1 (d2 l1-d1 l2))
Print["wb2 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb2=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
Print["wb3 from equation Profit-1 as function of w equals to zero"]
wb3=d1/(-d2 l1+d1 l2)
Print["wc1 from equation Profit-2 as function of w equals to zero"]
wc1=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0
d1 l2)
Print["w0-wa1"]
w1-wa1
FullSimplify[%]
Print["w0-wb1"]
w1-wb1
FullSimplify[%]
Print["w0-wb2"]
w1-wb2
FullSimplify[%]
Print["w0-wb3"]
w1-wb3
FullSimplify[%]
Print["w0-wc1"]
w1-wc1
FullSimplify[%]
```

Program-2a. Numerical Calculations if direct labour expenditures equal to zero.

d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.
l1=0.
l2=0
w=0.1
Print["Price p1"]
$(2\ d1)/(-a1+d0+\sqrt{a1^2 - 2\ a1\ d0 + d0^2 + 4\ a0\ d1}\ )$
Print["Price p2"]
$(2\ a2\ d1+(-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )\ d2)/(2\ a0\ d1+d0\ (-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))$
Print["Profit rate r"]
$-1+2/(a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )$
Print["Profit-0"]
$1/2\ (2-a1-d0-\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )$
Print["Profit-1"]
$-((d1\ (-2+a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))/(-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))$
Print["Profit-2"]
$-(((-2+a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )\ (2\ a2\ d1+(-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )\ d2))/(2\ (2\ a0\ d1+d0\ (-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))))$
Print["Value Added-0"]
$1/2\ (2-a1-d0-\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )$
Print["Value Added-1"]
$-((d1\ (-2+a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))/(-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))$
Print["Value Added-2"]
$-(((-2+a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )\ (2\ a2\ d1+(-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ )\ d2))/(2\ (2\ a0\ d1+d0\ (-a1+d0+\sqrt{(a1 - d0)^2 + 4\ a0\ d1}\ ))))$

Results of calculations in the Program-2a:

Prices:

$p_1 = 2.0954451150103326$

$p_2 = 2.704767189884247$

Profit rate:

$r = 1.4417370320380352$

Profits:

$\pi_0 = 0.5904554884989668$

$\pi_1 = 1.2372670690061995$

$\pi_2 = 1.5970446323790806$

Value added:

$VA_0 = \pi_0$

$VA_1 = \pi_1$

$VA_2 = \pi_2$

Program-3. Graphs.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0
w=0.1
ep=0
Print["Price p1 versus l1"]
Plot[d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","p1"}]
Print["Price p1 versus l2"]
Plot[d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l2,0,8},AxesLabel->{"l2","p1"}]
Print["Price p2 versus l1"]
Plot[d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","p2"}]
Print["Price p2 versus l2"]
Plot[d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l2,0,8},AxesLabel->{"l1","p2"}]
Print["Price p1(l1;l2)"]
Plot3D[d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l1,0,8},{l2,0,8},AxesLabel->{"l1","l2","p1"},MaxRecursion->5]
Print["Price p2(l1;l2)"]
Plot3D[d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1
d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2
w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])),{l1,0,8},{l2,0,8},AxesLabel->{"l1","l2","p2"},MaxRecursion->5]
Print["Profit-0 versus l0"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-
a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l0,0,8},AxesLabel->{"l0","profit-0"}]
Print["Profit-0 versus l1"]
```

```
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","profit-0"}]
Print["Profit-0 versus l2"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","profit-0"}]
Print["Profit-1 versus l0"]
Plot[1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))),{l0,0,8},AxesLabel->{"l0","profit-1"}]
Print["Profit-1 versus l1"]
gpr1=Plot[1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))),{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","profit-1"}]
Print["Profit-1 versus l2"]
Plot[1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))),{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","profit-1"}]
Print["Profit-2 versus l0"]
Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l0,0,8},AxesLabel->{"l0","profit-2"}]
Print["Profit-2 versus l1"]
Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","profit-2"}]
Print["Profit-2 versus l2"]
gpr2=Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","profit-2"}]
Print["Profit-0(l1;l2)"]
Plot3D[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l1,0,8},{l2,0,10},AxesLabel->{"l1","l2","profit-0"},MaxRecursion->5]
Print["Profit-1(l1;l2)"]
Plot3D[1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))),{l1,0,8},{l2,0,10},AxesLabel->{"l1","l2","profit-1"},MaxRecursion->5]
Print["Profit-2(l1;l2)"]
```

```
Plot3D[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))),{l1,0,8},{l2,0,10},AxesLabel->{"l1","l2","phofit-2"},MaxRecursion->5]
Print["Value Added-0 versus l0"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),{l0,0,10},AxesLabel->{"l0","VA-0"}]
Print["Value Added-0 versus l1"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),{l1,0,10},AxesLabel->{"l1","VA-0"}]
Print["Value Added-0 versus l2"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","VA-0"}]
Print["Value Added-1 versus l0"]
Plot[((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]),{l0,0,10},AxesLabel->{"l0","VA-1"}]
Print["Value Added-1 versus l1"]
gva1=Plot[((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]),{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","VA-1"},PlotStyle->Red]
Print["Value Added-1 versus l2"]
Plot[((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
```

```
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]),{l2,0,10},AxesLabel-
>{"l2","VA-1"}]
Print["Value Added-2 versus l0"]
Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (a2 d1-
a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l0,0,10},AxesLabel->{"l0","VA-2"}]
Print["Value Added-2 versus l1"]
Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (a2 d1-
a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l1,0,10},AxesLabel->{"l1","VA-2"}]
Print["Value Added-2 versus l2"]
gva2=Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (a2
d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2
l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","VA-
2"},PlotStyle->Red]
Show[gpr1,gva1,PlotRange->All,AxesLabel->{"l1","VA-1"}]
Show[gpr2,gva2,PlotRange->All,AxesLabel->{"l2","VA-2"}]
Print["w1 if e=0 from equation w1*L2=1"]
w1=1/(((a2 d1+d2-a1 d2) l0)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+((a2-a2 d0+a0 d2) l1)/(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)+l2)
Print["profit-1 versus l1 if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d1
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-
d1 l2)+d1 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0
d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]),{l1,0,12},AxesLabel->{"l1","profit-1"}]
Print["profit-1 versus l2 if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d1
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-
d1 l2)+d1 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
```

```
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0
d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3])),{l2,0,12},AxesLabel->{"l2","profit-1"}]
Print["profit-2 versus l2 if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3])))(1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3])),{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","profit-2"}]
Print["profit-2 versus l1 if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3])))(1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3])),{l1,0,10},AxesLabel->{"l1","profit-2"}]
Print["w versus l1 if  if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2),{l1,0,18},AxesLabel-
>{"l1","w"}]
Print["w versus l2 if  if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2),{l2,0,18},AxesLabel-
>{"l2","w"}]
Print["VA-1 versus l1 if w*L2 (value-1) =1"]
Plot[((d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d1
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-
d1 l2)+d1 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3])))(1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0
d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
```

```
#1^2+#1^3&,3]]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l1 (d2^2/(-a2 d1-
d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2
(l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]])),{l1,0,12},AxesLabel->{"l1","VA-1"}]
Print["VA-1 versus l2  if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[((d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d1
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-
d1 l2)+d1 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3])) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0
d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l1 (d2^2/(-a2 d1-
d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2
(l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]])),{l2,0,12},AxesLabel->{"l2","VA-1"}]
Print["VA-2 versus l1  if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[((d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]])) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2
```

```
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))),{l1,0,12},AxesLabel->{"l1","VA-2"}]
Print["VA-2 versus l2  if w*L2 (value-1) = 1"]
Plot[((d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3])) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))),{l2,0,12},AxesLabel->{"l2","VA-2"}]
Print["VA-1 versus l1 if w*L2 (value-1) =1 near origin"]
Plot[((d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d1
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-
d1 l2)+d1 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0
d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l1 (d2^2/(-a2 d1-
d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
```

```
1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2
(l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3]))),{l1,0,0.05},AxesLabel->{"l1","VA-1"}]
Print["VA-2 versus l2  if w*L2 (value-1) = 1 near origin"]
Plot[((d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))+d2
Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))
#1^2+#1^3&,3])) (1-(Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) l2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2))+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(1/((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0
l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3]))),{l2,0,0.05},AxesLabel->{"l2","VA-2"}]
Print["w versus l1 if  if w*L2 (value-1) = 1 near origin"]
Plot[1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2),{l1,0,0.005},AxesLabel-
>{"l1","w"}]
Print["w versus l2 if  if w*L2 (value-1) = 1 near origin"]
Plot[1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2),{l2,0,0.005},AxesLabel-
>{"l2","w"}]
Print["w0 if l1=0"]
1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)
Print["w0 if l2=0"]
1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)
Print["profit rate r versus w"]
Plot[-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{w,0,10},AxesLabel->{"w","r"}]
Print["profit rate r versus l1"]
Plot[-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","r"}]
Print["profit rate r versus l2"]
Plot[-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l2,0,10},AxesLabel->{"l2","r"}]
Print["profit rate r (l1;l2)"]
Plot3D[-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2
l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{l1,0,8},{l2,0,10},AxesLabel-
>{"l1","l2","r"}]
```

```
Print["profit rate r versus l1 if e=0"]
Plot[-1+1/Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3],{l1,0,8},AxesLabel->{"l1","r"}]
Print["profit rate r versus l2 if e=0"]
Plot[-1+1/Root[(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) #1^2+#1^3&,3],{l2,0,8},AxesLabel->{"l2","r"}]
```

Program-4. Dependences of profits and profit rate on rate of exploitation.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0
w=0.1
ep=0
w0=1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))
Print["profit-1 versus ep if l1=l2=0"]
g1=Plot[(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)))+d1 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2)+d1 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-
a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3])))) (1-(Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2
(l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]),{ep,-
0.5,1},AxesLabel->{"ep","profit-1"}]
l1=0.01
l2=0.02
Print["profit-1 versus ep if l1=1 and l2=2"]
g2=Plot[(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)))+d1 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]+(l1 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2))))/((1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2)+d1 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2
(d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-
a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3])))) (1-(Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-
1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2
(l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]),{ep,-
0.5,1},AxesLabel->{"ep","profit-1"},PlotStyle->Dashed]
Show[g1,g2,AxesLabel->{"ep","profit-1"},PlotRange->All]
l1=0
l2=0
```

```
Print["profit-2 versus ep if l1=l2=0"]
g3=Plot[(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)))+d2 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1
d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2))))/(a2
d1-a1 d2+d2 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3])))  (1-(Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-
a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1
d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]),{ep,-0.5,1},AxesLabel->{"ep","profit-2"},PlotStyle->Green]
Show[g1,g3,AxesLabel->{"ep","profit-1 and 2"},PlotRange->All]
l1=0.01
l2=0.02
Print["profit-2 versus ep if l1=0.01 l2=0.02"]
g4=Plot[(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2)))+d2 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1
d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (d2 l1-d1 l2))))/(a2
d1-a1 d2+d2 Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3])))  (1-(Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-
a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1
d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-
1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3]),{ep,-0.5,1},AxesLabel->{"ep","profit-2"},PlotStyle-
>{Green,Dashed}]
Show[g3,g4,AxesLabel->{"ep","profit-2"},PlotRange->All]
l1=0
l2=0
Print["Profit-0 versus ep if l1=l2=0"]
g5=Plot[1-Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3],{ep,-0.5,1},AxesLabel-
>{"ep","profit-0"},PlotStyle->Red]
l1=0.01
l2=0.02
Print["Profit-0 versus ep if l1=0.01 l2=0.02"]
g6=Plot[1-Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3],{ep,-0.5,1},AxesLabel-
>{"ep","profit-0"},PlotStyle->{Red,Dashed}]
Show[g5,g6,AxesLabel->{"ep","profit-0"},PlotRange->All]
l1=0
```

```
l2=0
Print["profit rate r versus ep if l1=l2=0"]
g7=Plot[-1+1/Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3],{ep,-0.5,1},AxesLabel-
>{"ep","r"},PlotStyle->Gray]
l1=0.01
l2=0.02
Print["profit rate r versus ep if l1=0.01 l2=0.02"]
g8=Plot[-1+1/Root[(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(1/((1+ep)((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1
l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (1/((1+ep)((d2 (l0-a1
l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)))) #1^2+#1^3&,3],{ep,-0.5,1},AxesLabel-
>{"ep","r"},PlotStyle->{Gray,Dashed}]
Show[g7,g8,AxesLabel->{"ep","r"},PlotRange->All]
```

Program-5. Solution of system of equations for production prices. Wage rate is fixed.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l2=0
w=0.1
ep=0
b0=0.2
X0=10
Y0=20
b1=2
X1=20
Y1=10
b2=5
X2=12
Y2=15
l1=2
FindRoot[{(d0+p1 a0+p2 w l0)+r (b0+p1 X0+p2 Y0)==1,(d1+p1 a1+p2 w l1)+r (b1+p1 X1+p2
Y1)==p1,(d2+p1 a2+p2 w l2)+r (b2+p1 X2+p2 Y2)==p2,Pi0==r (b0+p1 X0+p2 Y0),Pi1==r (b1+p1 X1+p2
Y1),Pi2==r (b2+p1 X2+p2 Y2)},{r,0.01},{p1,1.6},{p2,1.5},{Pi0,0.6},{Pi1,0.6},{Pi2,0.6}]
```

Program-5a. Solution of system of equations for production prices. Exploitation is zero. Numerical example.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l2=0
ep=0
w0=1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))
b0=0.2
X0=10
Y0=20
b1=2
X1=20
Y1=10
b2=5
X2=12
Y2=15
l1=3
FindRoot[{(d0+p1 a0+p2 (1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0
d1)+l2))) l0)+r (b0+p1 X0+p2 Y0)==1,(d1+p1 a1+p2 (1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0
l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) l1)+r (b1+p1 X1+p2 Y1)==p1,(d2+p1 a2+p2 (1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0
l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))) l2)+r (b2+p1 X2+p2 Y2)==p2,Pi0==r (b0+p1 X0+p2
Y0),Pi1==r (b1+p1 X1+p2 Y1),Pi2==r (b2+p1 X2+p2 Y2),w==1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-
d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))},{r,0.01},{p1,5},{p2,2},{Pi0,0.2},{Pi1,0.3},{Pi2,0.3},{w,1}]
```

Program-6. Solution of system of equations for production prices. Wage rate is fixed.

```
ep=0
w0=1/((1+ep) ((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2))
Solve[{(d0+p1 a0+p2 w l0)==1,(d1+p1 a1+p2 w l1)==p1,(d2+p1 a2+p2 w l2)==p2},{w,p1,p2}]
FullSimplify[%]
w1=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
w1-w0
FullSimplify[%]
```

Program-7. Function ROOT[f,n] – examples of application.

```
a=2
b=1
a1=1
p=3
q=1
l=6.
Print["root-1"]
Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,1]
Print["root-2"]
Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,3]
Print["root-1"]
g1=Plot[Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,1],{l,0,4},AxesLabel->{"l","root-
1"},PlotStyle->Red]
Print["root-2"]
g2=Plot[Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,2],{l,0,4},AxesLabel->{"l","root-
2"},PlotStyle->Green]
Print["root-3"]
g3=Plot[Root[(#1-(a+l b)) (#1-(a1-Sqrt[p-l q])) (#1-(a1+Sqrt[p-l q]))&,3],{l,0,4},AxesLabel->{"l","root-
3"}]
Show[g1,g2,g3,AxesLabel->{"l","roots"},PlotRange->All]
Print["root-1"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,1]
Print["root-2"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,3]
Print["root-4"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,4]
Print["root-5"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,5]
Print["root-6"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,6]
Print["new series-1"]
Print["root-1"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,1]
Print["root-2"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,3]
Print["root-4"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,4]
Print["root-5"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,5]
Print["root-6"]
Root[(#1-1.) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,6]
Print["new series-2"]
Print["root-1"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,1]
Print["root-2"]
```

```
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,3]
Print["root-4"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,4]
Print["root-5"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,5]
Print["root-6"]
Root[(#1-1) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,6]
Print["new series-3"]
Print["root-1"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,1]
Print["root-2"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,3]
Print["root-4"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,4]
Print["root-5"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,5]
Print["root-6"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2)&,6]
Print["new series-1a"]
Print["root-1"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,1]
Print["root-2"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,2]
Print["root-3"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,3]
Print["root-4"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,4]
Print["root-5"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,5]
Print["root-6"]
Root[(#1-0.5) (#1-(3+2 I)) (#1-(3-2 I))(#1-(1+2 I)) (#1-(1-2 I))(#1-2.)&,6]
```

Program-8. Proof that prices of exchange by “values-1” equal to prices of equal profitability and equal to production prices if exploitation is zero ep = 0.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l2=0
ep=0
b0=0.2
X0=10
Y0=20
b1=2
X1=20
Y1=10
b2=5
X2=12
Y2=15
l1=3
Print["w0"]
w0=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0 d1 l2)
Print["value L0"]
L0=((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)
Print["value L1"]
L1=(-d1 l0+(-1+d0) l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)
Print["value L2"]
L2=(d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2
Print["value-price q1"]
q1=L1/L0
((-d1 l0+(-1+d0) l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1))/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1))
FullSimplify[%]
Print["value-price q2"]
q2=L2/L0
((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1))
FullSimplify[%]
Print["price p1"]
p1=d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
Print["price p2"]
p2=d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
Print["p1:q1 = 1; w"]
FindRoot[(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1
```

d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))))/(((-d1 l0+(-1+d0) l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1))/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)))==1,{w,w0}]

Print["w0"]

w0

Print["p2:q2 = 1; w"]

FindRoot[(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))))/(((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)))==1,{w,w0}]

Print["w0 if exploitation is absent ep = 0"]

w1=(1-a1-d0+a1 d0-a0 d1)/(a2 d1 l0+d2 l0-a1 d2 l0+a2 l1-a2 d0 l1+a0 d2 l1+l2-a1 l2-d0 l2+a1 d0 l2-a0 d1 l2)

Print["Proverka that p1:q1=1 and p2:q2=1 if exploitation is absent ep = 0"]

(d1^2/(-a1 d1-d2 l1 w1+d1 Root[-a2 d1 l0 w1+a1 d2 l0 w1+a2 d0 l1 w1-a0 d2 l1 w1-a1 d0 l2 w1+a0 d1 l2 w1+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w1-a2 l1 w1+a1 l2 w1+d0 l2 w1) #1+(-a1-d0-l2 w1) #1^2+#1^3&,3]+(l1 w1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w1-d1 l2 w1)))/(d2 l1 w1-d1 l2 w1+d1 Root[-a2 d1 l0 w1+a1 d2 l0 w1+a2 d0 l1 w1-a0 d2 l1 w1-a1 d0 l2 w1+a0 d1 l2 w1+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w1-a2 l1 w1+a1 l2 w1+d0 l2 w1) #1+(-a1-d0-l2 w1) #1^2+#1^3&,3]))))/(((-d1 l0+(-1+d0) l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1))/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)))

(d2^2/(-a2 d1-d2 l2 w1+d2 Root[-a2 d1 l0 w1+a1 d2 l0 w1+a2 d0 l1 w1-a0 d2 l1 w1-a1 d0 l2 w1+a0 d1 l2 w1+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w1-a2 l1 w1+a1 l2 w1+d0 l2 w1) #1+(-a1-d0-l2 w1) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w1-d1 l2 w1)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w1+a1 d2 l0 w1+a2 d0 l1 w1-a0 d2 l1 w1-a1 d0 l2 w1+a0 d1 l2 w1+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w1-a2 l1 w1+a1 l2 w1+d0 l2 w1) #1+(-a1-d0-l2 w1) #1^2+#1^3&,3]))))/(((d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2)/(((-1+a1) l0-a0 l1)/(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)))

Program-9. Prices; profits; value added for the price system of equal profitability versus real wage and money wage per the unit of goods.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=1
l2=1
w=0.1
ep=0
w=W2/l2
p2=d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3]))
W0max=0.053729482556830966
W1max=0.5379248255683097
W2max=0.5379248255683097`
Print["Profit-0 versus W0=w*l0"]
Plot[1-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 l1 (W0/l0)-a0 d2 l1 (W0/l0)-a1 d0 l2 (W0/l0)+a0 d1 l2 (W0/l0)+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 l1 (W0/l0)+a1 l2 (W0/l0)+d0 l2 (W0/l0)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3],{W0,0,W0max},AxesLabel->{"w*l0","profit-0"}]
Print["Profit-0 versus W0*p2"]
gpr0x=ParametricPlot[{W0 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W0/l0)+d2 Root[(W0/l0) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W0/l0) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W0/l0) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W0/l0) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W0/l0) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3])),1-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 l1 (W0/l0)-a0 d2 l1 (W0/l0)-a1 d0 l2 (W0/l0)+a0 d1 l2 (W0/l0)+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 l1 (W0/l0)+a1 l2 (W0/l0)+d0 l2 (W0/l0)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3]},{W0,0,W0max},AxesLabel->{"w*l0*p2","profit-0"}]
Print["Profit-1 versus W1=w*l1"]
gpr1=Plot[1/(-((1-(a2 l1+l2) (W1/l1)+a1 (-1+l2 (W1/l1)))/((d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2)) (-1+Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1))))/((d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1)) (d2 W1-d1 l2 (W1/l1))+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))),{W1,0,W1max},AxesLabel->{"w*l1","profit-1"}]
Print["Profit-1 versus W1*p2"]
gpr1x=ParametricPlot[{W1 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W1/l1)+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3])),1/(-((1-(a2 l1+l2) (W1/l1)+a1 (-1+l2 (W1/l1)))/((d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2)) (-1+Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1))))/((d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1)) (d2 W1-d1 l2 (W1/l1))+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3])))},{W1,0,W1max},AxesLabel->{"w*l1*p2","profit-1"}]
Print["Profit-2 versus W2=w*l2"]
```

```
gpr2=Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) (W2/l2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[(W2/l2) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-
a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 (W2/l2)-d1 W2)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1
d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))),{W2,0,W2max},AxesLabel->{"w*l2","profit-2"}]
Print["Profit-2 versus p2*W2"]
gpr2x=ParametricPlot[{W2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3]))),1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) (W2/l2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-
a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 (W2/l2)-d1 W2)))/(d2 (a2
d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2)
#1^2+#1^3&,3]))),{W2,0,W2max},AxesLabel->{"p2*w*l2","profit-2"}]
NSolve[1-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 l1 (W0/l0)-a0 d2 l1 (W0/l0)-a1 d0 l2 (W0/l0)+a0 d1 l2
(W0/l0)+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 l1 (W0/l0)+a1 l2 (W0/l0)+d0 l2 (W0/l0)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0))
#1^2+#1^3&,3]==0,W0]
NSolve[1/(-((1-(a2 l1+l2) (W1/l1)+a1 (-1+l2 (W1/l1)))/((d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2)) (-1+Root[(W1/l1) (-a2
d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2))
#1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 W1-d1 l2
(W1/l1))))/((d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1)) (d2 W1-d1 l2 (W1/l1)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1))
#1^2+#1^3&,3])))==0,W1]
NSolve[1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) (W2/l2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
W2) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 (W2/l2)-d1 W2)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2
Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))==0,W2]
Print["VA-0 versus W0=w*l0"]
gva0=Plot[(1-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 l1 (W0/l0)-a0 d2 l1 (W0/l0)-a1 d0 l2 (W0/l0)+a0 d1 l2
(W0/l0)+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 l1 (W0/l0)+a1 l2 (W0/l0)+d0 l2 (W0/l0)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0))
#1^2+#1^3&,3])+W0,{W0,0,W0max},AxesLabel->{"w*l0","VA-0"}]
Print["VA-0 versus W0=w*l0"]
gva0x=ParametricPlot[{W0 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W0/l0)+d2 Root[(W0/l0) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W0/l0) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W0/l0))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W0/l0) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W0/l0) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W0/l0) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3]))),(1-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 l1 (W0/l0)-a0 d2 l1 (W0/l0)-a1 d0 l2
(W0/l0)+a0 d1 l2 (W0/l0)+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 l1 (W0/l0)+a1 l2 (W0/l0)+d0 l2 (W0/l0)) #1+(-a1-d0-
l2 (W0/l0)) #1^2+#1^3&,3])+W0},{W0,0,W0max},AxesLabel->{"p2*w*l0","VA-0"}]
Print["VA-1 versus W1=w*l1"]
gva1=Plot[(1/(-((1-(a2 l1+l2) (W1/l1)+a1 (-1+l2 (W1/l1)))/((d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2)) (-1+Root[(W1/l1)
(-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0
l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 W1-d1 l2
(W1/l1))))/((d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1)) (d2 W1-d1 l2 (W1/l1)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0
l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1))
#1^2+#1^3&,3])))))+W1,{W1,0,W1max},AxesLabel->{"w*l1","VA-1"}]
Print["VA-1 versus p2*W1"]
gva1x=ParametricPlot[{W1 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W1/l1)+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1
```

```
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]]),(1/(-((1-(a2 l1+l2) (W1/l1)+a1 (-1+l2 (W1/l1)))/((d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2)) (-
1+Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-
a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]]))+1/d1 (-1+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 W1-d1
l2 (W1/l1))))/((d1+d2 W1-d1 l2 (W1/l1)) (d2 W1-d1 l2 (W1/l1)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2
d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2
(W1/l1)) #1^2+#1^3&,3])))))+W1},{W1,0,W1max},AxesLabel->{"p2*w*l1","VA-1"}]
Print["VA-2 versus W2=w*l2"]
gva2=Plot[(1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) (W2/l2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[(W2/l2) (-a2 d1
l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-
a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 (W2/l2)-d1 W2)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1
d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2
l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3])))+W2,{W2,0,W2max},AxesLabel->{"w*l2","VA-
2"}]
Print["VA-2 versus p2*W2"]
gva2x=ParametricPlot[{W2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3])),(1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) (W2/l2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-
a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 (W2/l2)-d1 W2)))/(d2 (a2
d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-W2)
#1^2+#1^3&,3])))+W2},{W2,0,W2max},AxesLabel->{"p2*w*l2","VA-2"}]
VA2=1.8

g2tts=Plot[VA2-W2,{W2,0,W2max},AxesLabel->{"w*l2","Profit-2"},PlotStyle->Red]
Show[g2tts,gpr2,PlotRange->All,AxesLabel->{"w*l2","Profit-2"}]
w=W2/l2
Print["Price p1 versus W1=w*l1"]
Plot[d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (W1/l1)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0 (W1/l1)-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]+(W1 (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2))))/((W1/l1) (d2 l1-d1 l2)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2
l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2
(W1/l1)) #1^2+#1^3&,3])),{W1,0,W1max},AxesLabel->{"w*l1","p1"}]
Print["Price p1 versus p2*W1"]
ParametricPlot[{W1 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W1/l1)+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-
a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3])),d1^2/(-a1 d1-d2 l1 (W1/l1)+d1 Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0 (W1/l1)-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2
(W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+(W1/l1) (d2 l1-d1 l2))))/((W1/l1) (d2 l1-d1 l2)+d1
Root[(W1/l1) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W1/l1) (-d2 l0-a2
l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W1/l1)) #1^2+#1^3&,3]))},{W1,0,W1max},AxesLabel->{"p2*w*l1","p1"}]

Print["Price p2 versus W2=w*l2"]
Plot[d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1
l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2
(a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1
d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2))
#1^2+#1^3&,3]),{W2,0,W2max},AxesLabel->{"w*l2","p2"}]
```

```
Print["Price p2 versus p2*W2"]
ParametricPlot[{W2 (d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-
a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3])))},d2^2/(-a2 d1-d2 l2 (W2/l2)+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1 d2 l0+a2 d0 l1-a0
d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-l2 (W2/l2))
#1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+(W2/l2) (d2 l1-d1 l2))))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[(W2/l2) (-a2 d1 l0+a1
d2 l0+a2 d0 l1-a0 d2 l1-a1 d0 l2+a0 d1 l2)+(a1 d0-a0 d1+(W2/l2) (-d2 l0-a2 l1+a1 l2+d0 l2)) #1+(-a1-d0-
l2 (W2/l2)) #1^2+#1^3&,3]))},{W2,0,W2max},AxesLabel->{"p2*w*l2","p2"}]
Print["Price p1 versus W1 and W2"]
W0=0.2
Plot3D[d1^2/(-a1 d1-d2 W1+d1 Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1
W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]+(W1 (-a2 d1^2+d2 (a1
d1+d2 W1-d1 W2)))/(d2 W1-d1 W2+d1 Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0
d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2)
#1^2+#1^3&,3])),{W1,0,W1max},{W2,0,W2max},AxesLabel->{"W1","W2","p1"}]
Print["Price p2 versus W1 and W2"]
W0=0.2
Plot3D[d2^2/(-a2 d1-d2 W2+d2 Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1
W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2
W1-d1 W2)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1
W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2)
#1^2+#1^3&,3])),{W1,0,W1max},{W2,0,W2max},AxesLabel->{"W1","W2","p2"}]
Print["VA-1 versus W1 and W2"]
W0=0.2
Plot3D[((-a2 d1 W1+(-1+a1) d2 W1+d1 W2)+d1 Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0
W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3] (-1-W2+Root[-
a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0
W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 W1-a1 W2)+(a1+W2-Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0
d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])
Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1
W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]),{W1,0,W1max},{W2,0,W2max},AxesLabel-
>{"W1","W2","VA-1"}]
Print["VA-2 versus W1 and W2"]
W0=0.2
Plot3D[1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 W1-W2)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 W2) (-1-W2+Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2
d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1 W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 W1-d1 W2)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 W2) (a2 d1-a1 d2+d2
Root[-a2 d1 W0+a1 d2 W0+a2 d0 W1-a0 d2 W1-a1 d0 W2+a0 d1 W2+(a1 d0-a0 d1-d2 W0-a2 W1+a1
W2+d0 W2) #1+(-a1-d0-W2) #1^2+#1^3&,3]))),{W1,0,W1max},{W2,0,W2max},AxesLabel-
>{"W1","W2","VA-2"}]
```

Program-10. Fundamental Marx's Theorem (first part).

```
Print["proof for prices of equal profitability"]
Print["lambda A1"]
Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]
Print["Find w from cubic equation if lambda = 1"]
Solve[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) 1+(-a1-d0-l2 w) 1^2+1^3==0,w]
FullSimplify[%]
w1=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
L2=(d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1))/((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1)+l2
Print["w0 if ep=0"]
w0=1/L2
Print["proverka w1=w0"]
w1-w0
FullSimplify[%]
Print["Proof for prices of production"]
Print["A1 matrix"]
A1={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{w l0,w l1,w l2}}
MatrixForm[%]
Print["T matrix"]
T={{b0,b1,b2},{X0,X1,X2},{Y0,Y1,Y2}}
MatrixForm[%]
Print["B=A1+r*T-I"]
B=A1+r T-IdentityMatrix[3]
MatrixForm[%]
Print["Determinate B"]
Det[B]
FullSimplify[%]
r1=0
Print["Determinate B if r=0"]
(-(d2+b2 r1) (-1+a1+r1 X1)+(d1+b1 r1) (a2+r1 X2)) (l0 w+r1 Y0)-(-(d2+b2 r1) (a0+r1 X0)+(-1+d0+b0 r1) (a2+r1 X2)) (l1 w+r1 Y1)+(-(d1+b1 r1) (a0+r1 X0)+(-1+d0+b0 r1) (-1+a1+r1 X1)) (-1+l2 w+r1 Y2)
Solve[(-(d2+b2 r1) (-1+a1+r1 X1)+(d1+b1 r1) (a2+r1 X2)) (l0 w+r1 Y0)-(-(d2+b2 r1) (a0+r1 X0)+(-1+d0+b0 r1) (a2+r1 X2)) (l1 w+r1 Y1)+(-(d1+b1 r1) (a0+r1 X0)+(-1+d0+b0 r1) (-1+a1+r1 X1)) (-1+l2 w+r1 Y2)==0,w]
FullSimplify[%]
w2=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
Print["proverka w2=w0"]
w2-w0
FullSimplify[%]
Print["proof into opposite direction"]
Print["for prices of equal profitability"]
Solve[-a2 d1 l0 w0+a1 d2 l0 w0+a2 d0 l1 w0-a0 d2 l1 w0-a1 d0 l2 w0+a0 d1 l2 w0+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w0-a2 l1 w0+a1 l2 w0+d0 l2 w0) x+(-a1-d0-l2 w0) x^2+x^3==0,x]
Print["proof into opposite direction"]
Print["for production prices"]
Solve[(-(d2+b2 r2) (-1+a1+r2 X1)+(d1+b1 r2) (a2+r2 X2)) (l0 w0+r2 Y0)-(-(d2+b2 r2) (a0+r2 X0)+(-1+d0+b0 r2) (a2+r2 X2)) (l1 w0+r2 Y1)+(-(d1+b1 r2) (a0+r2 X0)+(-1+d0+b0 r2) (-1+a1+r2 X1)) (-1+l2 w0+r2 Y2)==0,r2]
```

Program-11. Fundamental Marx's Theorem (intermediate symbolic calculations).

```
f=-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) x+(-a1-d0-l2 w) x^2+x^3
K0=-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w
K1=a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w
K2=-a1-d0-l2 w
K3=1
Print["w0"]
w0=(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)/((-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2)
Print["P"]
P=-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1
Print["Q"]
Q=(-1+a1) d2 l0-a0 d2 l1-a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1) l2
Print["SK"]
SK=K0+K1+K2+K3
Print["q=Q*(w-w0)"]
q=Q (w-w0)
Print["Proverka SK-q"]
SK-q
FullSimplify[%]
x=1/(1+r)
Print["f(r)"]
g=f (1+r)^3
FullSimplify[%]
Print["g1(r)"]
g1=q+r (K0 (r^2+3 r+3)+K1 (r+2)+K2)
Print["Proverka g1-g"]
g1-g
FullSimplify[%]
Print["D[f1]/dr"]
dfr=D[g1,r]
FullSimplify[%]
Print["D[f1]/dw"]
dfw=D[g1,w]
FullSimplify[%]
w=w0
r=0
Print["df/dr if r=0 and w=w0"]
dfr0=dfr
FullSimplify[%]
Print["df/dw if r=0 and w=w0"]
dfw0=dfw
FullSimplify[%]
Print["dr/dw=-(dfw/dfr)"]
-dfw0/dfr0
FullSimplify[%]
```

Program-12. Fundamental Marx's Theorem (second part).

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0.
Print["dr/dw if w=w0 and r=0"]
(d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1) l2)^2/(a2 d1 (-3-a1 (-2+d0)+2 d0+a0 d1)
l0+((-1+a1)^2 (-2+d0)-a0 a1 d1) d2 l0+a2 ((-2+a1) (-1+d0)^2-a0 d0 d1) l1+a0 (-3+2 a1+2 d0-a1 d0+a0 d1) d2
l1-(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)^2 l2)
Print["X"]
(d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1) l2)^2
Print["Y"]
(a2 d1 (-3-a1 (-2+d0)+2 d0+a0 d1) l0+((-1+a1)^2 (-2+d0)-a0 a1 d1) d2 l0+a2 ((-2+a1) (-1+d0)^2-a0 d0 d1)
l1+a0 (-3+2 a1+2 d0-a1 d0+a0 d1) d2 l1-(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)^2 l2)
Print["s1"]
-3-a1 (-2+d0)+2 d0+a0 d1
Print["s2"]
(-1+a1)^2 (-2+d0)-a0 a1 d1
Print["s3"]
(-2+a1) (-1+d0)^2-a0 d0 d1
Print["s4"]
-3+2 a1+2 d0-a1 d0+a0 d1
Print["s5"]
-(-1+a1+d0-a1 d0+a0 d1)^2
```

Program-13. Алгоритмы расчёта производных от прибылей в единицах первого и второго подразделений.

```
pr1=1/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))))
pr2=1/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2
d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2
w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))
Print["D[profit-1]/dl1"]
D[pr1,l1]
Print["D[profit-2]/dl2"]
D[pr2,l2]
```

Program-14. Графики кривых максимальной прибыли в единице продукции первого подразделения.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0
w=0.1
ep=0
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods"]
Print["l2"]
l2=1
g1b1=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1 w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2 l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2))))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l1,0,1},{w,0,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->Green]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods"]
Print["l2"]
l2=1
```

```
g1b11=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))))^2)==0,{l1,0,1},{w,0.59,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle-
>Green]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods"]
Print["l2"]
l2=1
g1b12=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
```

```
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l1,0.32,1},{w,0.,0.51},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->Green]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods Root-1"]
Print["l2"]
l2=1
g1b1x=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))+1/d1 ((d2^2 l1 w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(d2 l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))+1/d1 (-1+(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l1,0,1},{w,0,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->{Pink}]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods Root-1"]
```

```
Print["l2"]
l2=1
g1b1y=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2))))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l1,0.25,0.32},{w,0.51,0.59},FrameLabel-
>{"l1","w"},ContourStyle->{Pink}]
Show[g1b11,g1b12,g1b1y,PlotRange->All,FrameLabel->{"l1","w"}]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods"]
Print["l2"]
l2=2
g1c1=g1r=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
```

```
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l1,0,1},{w,0,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->Red]
Show[g1b1,g1b1x,PlotRange->All,FrameLabel->{"l1","w"}]

Print["w(l1) if profit-1 is maximum in the unit of goods"]
Print["l2"]
l2=2
g1r=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
```

```
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l1,0,1},{w,0,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->Red]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum upper branch"]
Print["l2"]
l2=2
g1r1=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2))))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))))^2)==0,{l1,0,0.46},{w,0.28,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle-
>Red]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum lower branch"]
Print["l2"]
l2=2
g1r2=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
```

```
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l1,0.63,1},{w,0.14,0.22},FrameLabel-
>{"l1","w"},ContourStyle->Red]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum Root-1"]
Print["l2"]
l2=2
g1ra=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+1/d1 (-1+(l1 w (-
```

```
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l1,0,1},{w,0,1},FrameLabel->{"l1","w"},ContourStyle->Pink]
Show[g1r,g1ra,PlotRange->All,FrameLabel->{"l1","w"}]
Print["w(l1) if profit-1 is maximum Root-1"]
Print["l2"]
l2=2
g1rb=ContourPlot[-(((a2 w)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(d2 w (1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2 w)) (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2
l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2
l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-
a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))+1/d1 ((d2^2 l1
w^2)/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1
d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(d2
l1 w^2 (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w)^2 (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2
l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0
d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))-(l1 w (-a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-
d1 l2 w)) (d2 w+(d1 (-a2 d0 w+a0 d2 w+a2 w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0
l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))/(a1 d0-
a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1
l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0
w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2)))/(-((1-(a2 l1+l2) w+a1 (-1+l2
w))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2
w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))+1/d1 (-1+(l1 w (-
a2 d1^2+d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/((d1+d2 l1 w-d1 l2 w) (d2 l1 w-d1 l2 w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1
d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w)
#1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l1,0.45,0.63},{w,0.22,0.28},FrameLabel-
>{"l1","w"},ContourStyle->Pink]
Show[g1r1,g1r2,g1rb,PlotRange->All,FrameLabel->{"l1","w"}]
```

Program-15. Графики кривых максимальной прибыли в единице продукции второго подразделения.

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=0.
l2=0
w=0.1
ep=0
Print["w(l2) if profit-2 is maximum in the unit of goods"]
Print["l1"]
l1=0
g2=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))^2)==0,{l2,0,12},{w,0,1},FrameLabel->{"l2","w"}]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum in the unit of goods"]
Print["l1"]
l1=1
g2g1=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
```

```
#1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l2,0,12},{w,0,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Green]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum upper branch"]
Print["l1"]
l1=1
g21a=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
```

```
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))^2)==0,{l2,0,12},{w,0.17,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Green]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum lower branch"]
Print["l1"]
l1=1
g21b=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2)))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))^2)==0,{l2,4.4,12},{w,0.05,0.12},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Green]
Show[g21a,g21b,PlotRange->All,FrameLabel->{"l2","w"}]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum Root-1"]
Print["l1"]
l1=1
g2ga=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
```

```
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l2,0,12},{w,0,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Pink]
Show[g2ga,g2g1,PlotRange->All,FrameLabel->{"l2","w"}]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum Root-1"]
Print["l1"]
l1=1
g2gb=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l2,2.9,4.73},{w,0.12,0.17},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Pink]
Show[g2gb,g21a,g21b,PlotRange->All,FrameLabel->{"l2","w"}]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum in the unit of goods"]
Print["l1"]
l1=2
g2r=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
```

w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))^2)==0,{l2,0,16},{w,0,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Red]

Print["w(l2) if profit-2 is maximum upper branch"]

Print["l1"]

l1=2

g2r1=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1

```
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]]))^2)==0,{l2,0,5.67},{w,0.09,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Red]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum Root-1"]
Print["l1"]
l1=2
g2ra=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2)))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l2,0,16},{w,0,1},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Pink]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum Root-1"]
Print["l1"]
l1=2
g2rc=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))/((a2 d1+d2-
```

```
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,1]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,1])))^2)==0,{l2,5.67,8.8},{w,0.07,0.09},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Pink]
Show[g2r,g2ra,PlotRange->All,FrameLabel->{"l2","w"}]
Print["w(l2) if profit-2 is maximum in the unit of goods"]
Print["l1"]
l1=2
g2rb=ContourPlot[-((((1-a1) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1
w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))+(a2 d1 w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0
d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]))-((-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0
w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-
d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2
(-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-
d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1
w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3]^2))-(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)) (a1 d0 w-a0 d1 w-(a1 w+d0 w) Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+w Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))/((a2 d1+d2-
a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1
d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])^2 (a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2
l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w+2 (-a1-d0-l2 w) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0
d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+3 Root[-a2 d1 l0
w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2
w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]^2))))/(-(1/d2)+(-1+a1+(a2 l1+l2-a1 l2) w)/((a2 d1+d2-a1 d2) (-
1+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1
w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2
(a2 d1+d2-a1 d2) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1
l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w)
#1^2+#1^3&,3])))^2)==0,{l2,8.5,20},{w,0.03,0.2},FrameLabel->{"l2","w"},ContourStyle->Red]
Show[g2r1,g2rb,g2rc,PlotRange->All,FrameLabel->{"l2","w"}]
```

Program-16. Цены обмена по стоимости (СИСТЕМА-3).

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=14.0
l2=0.3
w=0.1
A={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{0,0,0}}
MatrixForm[%]
l={l0,l1,l2}
MatrixForm[%]
C0=Inverse[IdentityMatrix[3]-A]
MatrixForm[%]
(IdentityMatrix[3]-A).C0
MatrixForm[%]
FullSimplify[%]
Print["L - values-1"]
L=Transpose[C0].l
FullSimplify[%]
Print["L0 - value-1"]
L0=L[[1]]
FullSimplify[%]
Print["L1 - value-1"]
L1=L[[2]]
FullSimplify[%]
Print["L2 - value-1"]
L2=L[[3]]
FullSimplify[%]
Print["p1"]
p1=L1/L0
FullSimplify[%]
Print["p2"]
p2=L2/L0
FullSimplify[%]
q1=(d1 l0+l1-d0 l1)/(l0-a1 l0+a0 l1)
q2=(d2 (l0-a1 l0+a0 l1)+a2 (d1 l0+l1-d0 l1)+((-1+a1) (-1+d0)-a0 d1) l2)/(l0-a1 l0+a0 l1)
Print["VA0"]
1-d0-a0 p1
Print["VA1"]
p1-d1-a1 p1
Print["VA2"]
p2-d2-a2 p1
Print["proverka p1-q1"]
p1-q1
```

```
FullSimplify[%]
Print["proverka p2-q2"]
p2-q2
FullSimplify[%]
```

Program-17. Цены производства (СИСТЕМА-1).

```
Print["d0"]
d0=0.2
Print["d1"]
d1=0.02
Print["d2"]
d2=0.06
Print["a0"]
a0=0.1
Print["a1"]
a1=0.4
Print["a2"]
a2=0.5
Print["l0"]
l0=0.1
Print["l1"]
l1=11.4087
Print["l2"]
l2=0.3
Print["b0"]
b0=0.2
Print["X0"]
X0=10
Print["Y0"]
Y0=20
Print["b1"]
b1=2
Print["X1"]
X1=20
Print["Y1"]
Y1=10
Print["b2"]
b2=5
Print["X2"]
X2=12
Print["Y2"]
Y2=15
Print["w"]
w=0.1
```

```
NSolve[{d0+a0 p1+w l0 p2+r (b0+X0 p1+Y0 p2)==1,d1+a1 p1+w l1 p2+r (b1+X1 p1+Y1 p2)==p1,d2+a2
p1+w l2 p2+r (b2+X2 p1+Y2 p2)==p2},{p1,p2,r}]
Print["It is necessary to substitute solution p1,p2,r into variables q1,q2,r0 and to run program again"]
q1=7.601708897167365
q2=3.9802893632889846
r0=1.6824647973730507 10^-7
Print["VA0"]
VA0=w l0 q2+r0 (b0+X0 q1+Y0 q2)
Print["VA1"]
VA1=w l1 q2+r0 (b1+X1 q1+Y1 q2)
Print["VA2"]
VA2=w l2 q2+r0 (b2+X2 q1+Y2 q2)
```

Program-18. Цены равной рентабельности (СИСТЕМА-2).

```
d0=0.2
d1=0.02
d2=0.06
a0=0.1
a1=0.4
a2=0.5
l0=0.1
l1=11.4087
l2=0.3
w=0.1

A={{d0,d1,d2},{a0,a1,a2},{w l0,w l1,w l2}}
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[Transpose[A]]
q0=-(1/d2)(l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])+(a2 (-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/(d2 (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
q1=-((-d2 l1 w+d1 l2 w-d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
q2=1
Print["p0"]
p0=1
Print["p1"]
p1=q1/q0
FullSimplify[%]
Print["p2"]
p2=q2/q0
FullSimplify[%]
Print["Lambda"]
LAM=Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]
Print["r"]
r=1/LAM-1
Print["r(w)"]
Plot[-1+1/Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3],{w,0,1},AxesLabel->{"w","r"}]
Print["VA0"]
1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-
```

```
a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))
Print["VA1"]
((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])
Print["VA2"]
1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])))
Print["VA0(l1)"]
Plot[1-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(d2^2 l0 w)/(-a2 d1-d2 l2 w+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3])),{l1,0,14},AxesLabel->{"l1","VA0"}]

Print["VA1(l1)"]
Plot[((-a2 d1 l1+(-1+a1) d2 l1+d1 l2) w+d1 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3] (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))/((a2 l1-a1 l2) w+(a1+l2 w-Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]) Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]),{l1,0,14},AxesLabel->{"l1","VA1"}]
Print["VA2(l1)"]
Plot[1/(-(1/d2)+(-1+a1+a2 l1 w-l2 w)/((a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (-1-l2 w+Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))+(a2 (a2 d1^2-d2 (a1 d1+d2 l1 w-d1 l2 w)))/(d2 (a2 d1+d2-a1 d2+d2 l2 w) (a2 d1-a1 d2+d2 Root[-a2 d1 l0 w+a1 d2 l0 w+a2 d0 l1 w-a0 d2 l1 w-a1 d0 l2 w+a0 d1 l2 w+(a1 d0-a0 d1-d2 l0 w-a2 l1 w+a1 l2 w+d0 l2 w) #1+(-a1-d0-l2 w) #1^2+#1^3&,3]))),{l1,0,14},AxesLabel->{"l1","VA2"}]
```